



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Equações Diferenciais Estocásticas em Modelos Financeiros

Catarina Andréia Rodrigo Vaz

**Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática e Aplicações**

Júri

Presidente: Prof. Doutor Diogo Luis de Castro Vasconcelos de Aguiar Gomes
Orientadores: Prof. Doutor Carlos J. S. Alves
Prof. Doutora Ana Bela Cruzeiro
Vogais: Doutor Juan Antonio Acebron
Doutor José Gonçalves

Setembro de 2009

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer aos meus orientadores, Professor Carlos Alves e Professora Ana Bela Cruzeiro, pelo apoio que me prestaram durante os últimos meses, e pela disponibilidade que apresentaram para esclarecer as minhas dúvidas ao longo da realização deste trabalho.

Gostaria também de agradecer à Closer, pela proposta do tema e pela oportunidade que me deram de desenvolver este trabalho. Em particular gostaria de agradecer ao José Gonçalves pela orientação no mundo dos derivados financeiros, bem como pela sua disponibilidade para todas as minhas dúvidas sobre este assunto.

Aos colegas de curso agradeço pelo companheirismo e entre-ajuda mostrados ao longo destes cinco anos.

Aos amigos mais próximos, sejam eles de longa ou de menos longa data, agradeço todos os momentos vividos e que ajudaram os últimos cinco anos a passar de uma forma que não irei esquecer.

À Lena e ao Rui agradeço pelos conselhos de irmãos mais velhos e pelos três "piolhos" lá de casa. Para estes últimos tenho um agradecimento muito especial, pois ajudaram a tia a manter a sanidade mental nos últimos anos!

Ao meu pai e à minha mãe agradeço o apoio constante e incondicional que sempre me deram, e com que sempre vou poder contar.

Por último, gostava de agradecer ao Bruno Santos, por toda a motivação e apoio que me deu, bem como pela infinita paciência, pois não deve ter sido fácil aturar-me nos últimos meses.

A precificação de derivados é uma ferramenta de grande utilidade para quem participa no mercado de derivativos. Desta forma, boas ferramentas para a valorização destes instrumentos financeiros são fundamentais.

O modelo clássico para esta valorização é o modelo de Black-Scholes. No entanto, e devido à instabilidade do mercado, novos modelos tiveram que surgir no panorama financeiro, como é o caso dos modelos com saltos e dos modelos com volatilidade estocástica.

Embora os novos modelos apresentem menos incoerências que o modelo de Black-Scholes, também necessitam de uma cuidada calibração dos seus parâmetros. Assim, utilizando os modelos propostos por Merton e por Heston, será realizada uma calibração relativamente aos valores observados no mercado. Com estes novos parâmetros calibrados serão então aplicados os métodos de aproximação numérica que visam atribuir um valor às opções muito próximo do existente no mercado

Palavras Chave: Movimento Browniano, Black-Scholes, Saltos, Volatilidade Estocástica, Calibração de Modelos Financeiros

Abstract

The pricing of derivatives is a useful tool for anyone involved in the derivatives market. Thus, good models and numerical tools for the valuation of these financial instruments are crucial.

The classic model for this valuation is the Black-Scholes model. However, due to instability of the market, new models had to arise in the financial landscape, as it is the case of models with jumps and models with stochastic volatility.

While the new models have fewer inconsistencies than Black-Scholes model, they also require a careful calibration of its parameters. Here, using the models proposed by Merton and Heston, a calibration is performed against the values observed in the market. After performing the calibration the parameters will be applied in the numerical approximation, aiming to find an option value as close as possible to the given market values.

Key words: Brownian Motion, Black-Scholes, Jumps, Stochastic Volatility, Financial Model Calibration

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 Probabilidade - Conceitos Iniciais	3
3 Equações Diferenciais Estocásticas em Modelos Financeiros	7
3.1 Modelos de Difusão Contínuos	7
3.1.1 Movimento Browniano	7
3.1.2 Integral de Itô	10
3.1.3 Equações Diferenciais Estocásticas	12
3.1.4 Equação de Black-Scholes	14
3.2 Modelos de Difusão com Saltos	17
3.2.1 Processo e Saltos de Poisson	17
3.2.2 Integral de Itô e Saltos de Poisson	20
3.2.3 Modelo de Merton	21
3.3 Modelos com Volatilidade Estocástica	23
3.3.1 Volatilidade	23
3.3.2 Modelo de Heston	24

3.3.3	Aproximação por Equação Diferencial Parcial	25
3.3.4	Soluções de Forma Fechada	29
4	Resultados Numéricos	31
4.1	O Método de Monte Carlo	31
4.1.1	Métodos Baseados em Simulações de Monte Carlo	32
4.1.2	Regra de Simpson	33
4.1.3	Resultados das Aproximações Numéricas	36
4.2	Calibração dos Modelos Implementados	44
5	Conclusão	63
	Bibliografia	64

Lista de Figuras

3.1	Simulação de Movimento Browniano	9
3.2	Simulações de preços de activos segundo um modelo com saltos de Poisson	19
4.1	Representação dos intervalos para aplicação da Regra de Simpson	34
4.2	Gráficos relativos à convergência dos valores P1 e P2, respectivamente	35
4.3	Gráficos relativos aos erros de convergência de P1 e P2, respectivamente	35
4.4	Gráficos representativos dos valores apresentados na Tabela (4.4) Respectivamente, da esquerda para a direita e de cima para baixo representam os resultados para os valores de $NSTEPS=25, 50, 100$ e 200	38
4.5	Gráficos representativos dos erros entre iteradas relativos ao valores apresentados na Tabela (4.4)	40
4.6	Gráficos representativos dos valores apresentados na Tabela (4.5) Respectivamente, da esquerda para a direita e de cima para baixo representam os resultados para os valores de $NSTEPS=25, 50, 100$ e 200	40
4.7	Gráficos representativos dos erros entre iteradas relativos ao valores apresentados na Tabela (4.5)	42
4.8	Gráficos representativos dos valores apresentados na Tabela (4.6) Respectivamente, da esquerda para a direita e de cima para baixo representam os resultados para os valores de $NSTEPS=25, 50, 100$ e 200	42
4.9	Gráficos representativos dos erros entre iteradas relativos ao valores apresentados na Tabela (4.6)	44
4.10	Superfícies dos valores de opção de mercado retirados de Kahalé (2005) e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Black-Scholes	50
4.11	Superfícies dos valores de opção de mercado retirados de Kahalé (2005) e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Merton	50

4.12 Superfícies dos valores de opção de mercado retirados de Kahalé (2005) e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Heston 50

4.13 Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos de difusão contínuos. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.5$, $T=0.75$ 53

4.14 Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos de difusão com saltos. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.5$, $T=0.75$ 53

4.15 Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos com volatilidade estocástica. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.5$, $T=0.75$ 54

4.16 Superfícies dos valores de opção de mercado referentes ao índice S&P 500, do dia 30 de Agosto de 2004, e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Black-Scholes. 57

4.17 Superfícies dos valores de opção de mercado referentes ao índice S&P 500, do dia 30 de Agosto de 2004, e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Merton. 57

4.18 Superfícies dos valores de opção de mercado referentes ao índice S&P 500, do dia 30 de Agosto de 2004, e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Heston. 57

4.19 Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos de difusão contínuos. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.3333$, $T=0.5833$, $T=0.8333$, $T=1.3333$ e $T=1.8333$ 60

4.20 Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos de difusão com saltos. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.3333$, $T=0.5833$, $T=0.8333$, $T=1.3333$ e $T=1.8333$ 60

4.21 Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos com volatilidade estocástica. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.3333$, $T=0.5833$, $T=0.8333$, $T=1.3333$ e $T=1.8333$ 61

Lista de Tabelas

4.1	Valores iniciais utilizados nas aproximações dos valores de P_1 e P_2	36
4.2	Melhores aproximações ao valores de P_1 e P_2 para limites do integral entre 500 e 5000	37
4.3	Valores iniciais utilizados nas aproximações dos vários modelos	38
4.4	Valores obtidos através de simulações de Monte Carlo para aproximação de modelos de difusão contínuos	39
4.5	Valores obtidos através de simulações de Monte Carlo para aproximação de modelos de difusão com saltos	41
4.6	Valores obtidos através de simulações de Monte Carlo para aproximação de modelos com volatilidade estocástica	43
4.7	Parâmetros Iniciais e Finais das Opções Calibradas com modelo de Black-Scholes.	48
4.8	Parâmetros Iniciais e Finais das Opções Calibradas com modelo de Merton	48
4.9	Parâmetros Iniciais e Finais das Opções Calibradas com modelo de Heston	48
4.10	Valores de Opções obtidos através dos modelos teóricos após Calibração e comparação com valores de mercado retirados de Kahalé (2005)	49
4.11	Resultados das aproximações numéricas após Calibração, onde os dados de mercado correspondem aos retirados de Kahalé (2005). $S_0 = 1.46$, $r=5\%$	51
4.12	Erros relativos das aproximações numéricas após Calibração em contraste com os preços observados no mercado, retirados de Kahalé (2005)	52
4.13	Parâmetros Iniciais e Finais das Opções após a calibração da gama de dados referente ao índice S&P 500, de dia 30 de Agosto de 2004, com modelo de Black-Scholes	55
4.14	Parâmetros Iniciais e Finais das Opções após a calibração da gama de dados referente ao índice S&P 500, de dia 30 de Agosto de 2004, com modelo de Merton	55

4.15	Parâmetros Iniciais e Finais das Opções após a calibração da gama de dados referente ao índice S&P 500, de dia 30 de Agosto de 2004, com modelo de Heston	55
4.16	Valores de Opções após Calibração e comparação com os valores de mercado referente ao índice S& P 500 do dia 30 de Agosto de 2004	56
4.17	Resultados das aproximações numéricas após a Calibração, onde os dados de mercado correspondem ao índice S&P 500 de dia 30 de Agosto de 2004. $S_0=1099.15$. $r=1.5\%$	58
4.18	Erros relativos das aproximações numéricas em contraste com os preços observados no mercado e correspondentes ao índice S&P 500 de dia 30 de Agosto de 2004.	59

CAPÍTULO 1

Introdução

Um produto derivado é um instrumento financeiro cujo preço, ou valor, depende de vários factores.

Neste trabalho serão desenvolvidos métodos numéricos para a valorização de um tipo específico de derivados financeiros, as opções. Uma correcta valoração destes produtos é indispensável para quem deseje participar no mercado de derivados.

Como é conhecido, o modelo de Black-Scholes (Black and Scholes (1973)) é aquele que mais frequentemente é utilizado para este tipo de precificações. Aqui os preços dos activos evoluem com base num Movimento Browniano Geométrico, e assumem-se taxas de juro e volatilidades constantes.

No entanto, ao longo dos anos, o modelo de Black-Scholes tem vindo a ser questionado, devido à inconsistência deste relativamente aos preços observados no mercado, que se mostram mais instáveis do que inicialmente se supunha. Surge, então, a necessidade de introdução de novos modelos mais complexos, como é o caso dos modelos onde o activo segue um processo de difusão com saltos ou até mesmo com uma volatilidade estocástica, os quais foram introduzidos nos anos seguintes, Merton (1976) e Heston (1993).

Ainda assim, se pretendemos que os modelos em questão correspondam à realidade do dia-a-dia devemos calibrar cuidadosamente os parâmetros destes modelos, através da comparação com preços de activos observados no mercado. No caso dos modelos utilizados existem resultados teóricos que nos permitem valorar explicitamente as opções em questão. Desta forma podemos utilizar estes resultados para calibrar os parâmetros dos modelos em estudo e então calcular as aproximações desejadas. A adequação da calibração tem um importante papel na valoração de derivados, uma vez que pode vir a ter uma grande influência na escolha do modelo da valoração.

O objectivo deste trabalho consiste no desenvolvimento de métodos numéricos para a valoração de opções, onde os activos a estas subjacentes podem seguir modelos de difusão contínua, ou modelos de difusão com saltos ou ainda modelos com volatilidade estocástica, devidamente calibrados em relação ao mercado.

Definição 2.1 (σ -álgebra) *Seja Ω um conjunto. Uma σ -álgebra sobre Ω , $\mathcal{F}(\Omega)$, é uma colecção de subconjuntos de Ω que satisfaz as seguintes condições:*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- Se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \setminus B \in \mathcal{F}$
- Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

A partir desta definição, podemos concluir que também pertencem à σ -álgebra os complementares dos seus elementos, as intersecções numeráveis dos seus elementos, bem como os conjuntos do tipo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ocorre em infinitos conjuntos } A_n\}$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ocorre quase sempre nos conjuntos } A_n\}$$

Além disso, se C é uma classe de Ω , a intersecção de todas as σ -álgebras em Ω que contém a classe C diz-se σ -álgebra gerada por C .

Definição 2.2 (Conjuntos Borel-Mensuráveis) *A σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos de \mathbb{R}^n diz-se σ -álgebra de Borel e designa-se por $B(\mathbb{R}^n)$. Os conjuntos pertencentes a esta σ -álgebra dizem-se Borel-Mensuráveis ou conjuntos de Borel.*

Definição 2.3 (Medida de Probabilidade) *Uma função de conjuntos P na σ -álgebra \mathcal{F} é chamada de medida de probabilidade se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \in \mathcal{F}$
- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$

- Se a A_1, A_2, \dots é uma coleção de conjuntos disjuntos em \mathcal{F} e como, por definição, a sua união numerável também pertence a \mathcal{F} , então $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

Definição 2.4 (Espaço de Probabilidade) Um espaço de probabilidade é um triplete (Ω, \mathcal{F}, P) onde Ω é um conjunto, \mathcal{F} é uma σ -álgebra e P é uma medida de probabilidade associada a \mathcal{F} .

Definição 2.5 (Variável Aleatória) Uma variável aleatória (v.a.), $X(\omega)$ é uma função com domínio Ω e contradomínio \mathbb{R} tal que,

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ é uma v.a. se } \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo o } A \in B(\mathbb{R})$$

Desta forma, a imagem inversa de um conjunto de Borel em \mathbb{R} , $X^{-1}(A)$ é \mathcal{F} -mensurável.

Definição 2.6 (Distribuição e Função Distribuição de Probabilidade) A coleção de probabilidades

$$F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$$

é chamada função distribuição da v.a. X .

Por outro lado, temos a coleção de probabilidades $P_X(B) = P(X \in B)$, onde B representa um conjunto Borel-mensurável, a qual designamos por distribuição de X .

Definição 2.7 (Variável Aleatória Contínua) Uma variável aleatória diz-se contínua se a sua função distribuição pode ser escrita da seguinte forma:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy, y \in \mathbb{R}$$

para alguma função f_X , integrável, a qual se designa por função densidade de probabilidade de X .

Definição 2.8 (Variável Aleatória Normal) Tomando o espaço de probabilidade $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P)$, onde P é definido por:

$$P(A) = \int_A f(x) dx = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

dizemos que $X(x) = x$ é uma variável aleatória Normal (ou Gaussiana) se a sua função distribuição for $P(A)$.

$$X(\mu, \sigma^2)$$

f é a função densidade de probabilidade de X .

Definição 2.9 (Valor Esperado) O valor esperado de uma v.a. X é definido como,

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x)$$

Desta forma análoga, podemos também dizer, que para uma qualquer função contínua g temos:

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)dF_X(x)$$

Quando falamos em valor esperado não nos podemos esquecer de uma das suas mais importantes propriedades: a **linearidade**:

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y], \text{ para } a, b \in \mathbb{R}$$

Nos caso das variáveis aleatórias contínuas esta propriedade mostra-se facilmente devido ao integral também ser linear.

Definição 2.10 (Variância) A variância de uma v.a. contínua é tal que:

$$Var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^2 dF_X(x)$$

ou seja,

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Definição 2.11 (Momentos) O momento de ordem- n da v.a. contínua X é tal que:

$$E[X^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x)dx$$

Definição 2.12 (Independência) Dois acontecimentos, A e B dizem-se independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

As variáveis aleatórias X e Y dizem-se independentes ($X \perp\!\!\!\perp Y$) se :

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2), \text{ para } B_1, B_2 \in \mathbb{R}$$

O conceito de independência pode também ser definido através das funções de distribuição e, no caso de variáveis aleatórias contínuas, densidade de probabilidade. Desta forma, $X \perp\!\!\!\perp Y$ se e só se,

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), x, y \in \mathbb{R}$$

Da mesma forma, se (X, Y) tem uma função densidade de probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ e funções densidade marginais f_X e f_Y temos que:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \text{ se e só se } f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y), x, y \in \mathbb{R}$$

Definição 2.13 (Valor Esperado Condicional) O valor esperado condicional de uma variável aleatória é o seu valor esperado relativamente à sua distribuição de probabilidade condicional. Mais formalmente, considere-se o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ e X uma variável aleatória. Se $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ é uma σ -álgebra, então existe uma única variável aleatória, Y , que satisfaz as condições

- $E[Y]$ é \mathcal{G} -mensurável.
- $\int_B E[Y] dP = \int_B X dP, \forall B \in \mathcal{G}$

Dizemos que Y é o valor esperado condicional e representa-se como $E[X|\mathcal{G}]$

Definição 2.14 (Processo Estocástico) Um processo estocástico $\{X(t), t \in T \in \mathbb{R}\}$ é uma família de variáveis aleatórias $X(t)$ definidas no mesmo espaço de probabilidade. Mais intuitivamente, se uma variável aleatória é um número real que varia aleatoriamente, então um processo estocástico é uma função que varia aleatoriamente.

Definição 2.15 (Filtração) Uma família de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ é uma filtração crescente se $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, para $s < t$

Definição 2.16 (Processo Adaptado a uma Filtração) O processo estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ diz-se adaptado à filtração crescente $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ se a σ -álgebra gerada por X estiver contida em \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$.

Todos os processos estocásticos são adaptados à σ -álgebra que geram, ou seja, X_t não transportam mais informação que \mathcal{F}_t .

Definição 2.17 (Martingala) Um processo estocástico $\{X_t, t > 0\}$ é uma martingala se:

- é adaptado em relação à filtração $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$
- $E[|X(t)|] < \infty$
- $E[X(t+s)|\mathcal{F}_t] = X(t), \forall s > 0$

Equações Diferenciais Estocásticas em Modelos Financeiros

3.1 Modelos de Difusão Contínuos

3.1.1 Movimento Browniano

O Movimento Browniano (MB) tem grande importância em diversas áreas, nas quais podemos inserir a Teoria da Probabilidade, as Finanças ou mesmo a Física. O nome deste processo deve-se ao biólogo Robert Brown, pelos seus estudos, datados do início do século XIX. No início do século XX, Louis Bachelier, Albert Einstein e Norbert Wiener começaram a desenvolver a teoria matemática deste processo.

Um MB é também conhecido como processo de Wiener, devido precisamente ao matemático supracitado Norbert Wiener, dado que este foi a primeira pessoa que definiu rigorosamente o Movimento Browniano, que pode então ser definido da seguinte forma:

Definição 3.1 *Um MB é um processo estocástico $\{B_t\}_{t \geq 0}$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. $B_0 = 0$
2. *As variáveis aleatórias $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ são independentes, para $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, ou seja, o Movimento Browniano tem incrementos independentes.*
3. *A variável aleatória $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$, ou seja, $E[B_t - B_s] = 0$*
4. $t \mapsto B_t$ *é uma função contínua.*

Da definição anterior podemos concluir facilmente que $B_t \sim N(0, t)$, ou seja, a variável aleatória B_t tem distribuição normal com valor esperado zero e variância t . Além disso é possível mostrar, a partir desta definição, que $t \mapsto B_t$ não é diferenciável, quase certamente. A este processo dá-se o nome de Movimento Browniano Padrão.

Uma vez que possui uma distribuição Normal a sua função densidade de probabilidade e a sua função geradora de momentos são as seguintes:

$$f_{B_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$E[e^{\sigma B_t}] = e^{\frac{(\sigma\sqrt{t})^2}{2}}$$

A condição (1), da definição (3.1), é uma convenção. Desta forma, se um Movimento Browniano começar em x pode ser representado na forma $\{x + B_t\}_{t \geq 0}$.

Um MB tem algumas propriedades interessantes, como é o caso da seguinte. Se analisarmos um conjunto numerável de tempos t tais que $B_t(w) = a$, verificamos que estamos perante um conjunto não numerável que, no entanto, não contém nenhum intervalo. Além disso, o MB é também uma martingala, como facilmente se pode comprovar:

$$\begin{aligned} E[B(t+s)|\mathcal{F}_t] &= E[B(t) - B(t) + B(t+s)|\mathcal{F}_t] \\ &= E[B(t)|\mathcal{F}_t] + E[B(t+s) - B(t)|\mathcal{F}_t], \text{ por linearidade do valor esperado} \\ &= B(t) + E[B(t+s) - B(t)] \\ &= B(t) \end{aligned}$$

Este último passo justifica-se devido ao valor esperado de um MB ser nulo e o anterior pela adaptação do processo à filtração e por independência dos incrementos, respectivamente.

Considere-se então o seguinte processo:

Exemplo 3.1 $X_t = \mu t + \sigma B_t$, com μ, σ constantes em \mathbb{R}

X_t segue uma distribuição normal e facilmente se verifica que o seu valor esperado é μt e a sua variância $\sigma^2 t$:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[\mu t + \sigma B_t] \\ &= E[\mu t] + E[\sigma B_t] \\ &= \mu t + \sigma E[B_t] \\ &= \mu t \end{aligned}$$

O último passo obtém-se por B_t ter valor esperado zero.

$$\begin{aligned} Var[X_t] &= Var[\mu t + \sigma B_t] \\ &= E[(\mu t + \sigma B_t)^2] - (E[\mu t + \sigma B_t])^2 \\ &= E[(\mu t)^2 + (\sigma B_t)^2 + 2\mu t \sigma B_t] - (\mu t)^2 \\ &= (\mu t)^2 + \sigma^2 t - (\mu t)^2 \\ &= \sigma^2 t \end{aligned}$$

A Figura 3.1 ilustra uma simulação deste exemplo, para valores de $\mu = 0.08$ e $\sigma = 0.2$.

Foi Bachelier, por volta de 1900, que descobriu que os preços de activos financeiros podem ser bem descritos através de um MB. No entanto, existia um problema. Um MB possui uma distribuição normal e este facto leva a

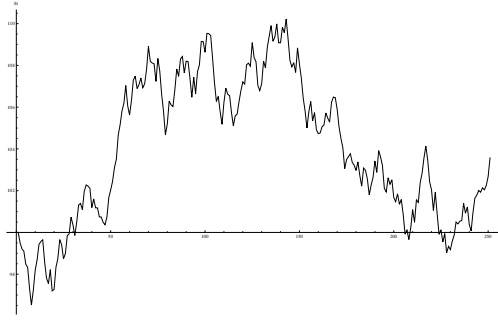


Figura 3.1: Simulação de Movimento Browniano

que possa tomar valor negativos, o que não se pretende quando estamos a falar de preços de activos financeiros. Em 1973 um novo processo é sugerido por Black, Scholes e Merton (Black and Scholes (1973), ver também Mikosch (1998)). Este novo processo dá pelo nome de Movimento Browniano Geométrico (MBG) e tem que satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

Como iremos mostrar mais à frente neste trabalho, a solução desta equação diferencial (estocástica) é dada por:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$$

Neste caso S_t não segue uma distribuição normal mas sim uma distribuição log-normal. Calcule-se então o valor esperado e a variância da solução deste processo:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}] \\ &= S_0 E[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}] \\ &= S_0 E[e^{\sigma B_t}] e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= S_0 e^{\mu t} \end{aligned}$$

Utilizando no penúltimo passo a função geradora de momentos definida anteriormente.

Da mesma forma podemos calcular a variância:

$$\begin{aligned} Var[X_t] &= Var[S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}] \\ &= S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} Var[e^{\sigma B_t}] \\ &= S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} (E[(e^{\sigma B_t})^2] - (E[e^{\sigma B_t}])^2) \\ &= S_0^2 e^{(2\mu - \sigma^2)t} (e^{2\sigma^2 t} - e^{\sigma^2 t}) \\ &= S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1) \end{aligned}$$

Sabendo que as trajectórias do MB são contínuas mas não diferenciáveis deparamo-nos com uma questão interessante. Como calcular, por exemplo,

$$\int_0^t B_s(w)dB_s(w)$$

Este integral não pode ser calculado da forma usual, como um integral de Riemann. No entanto podemos considerar a sua aproximação por somas de Riemann e entender o integral como o limite destas somas. Desta forma, como $B_t \in L_2[0, t]$ e considerando uma partição do intervalo $[0, t]$ em n subintervalos, tais que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$:

$$\begin{aligned} \int_0^t B_s(w)dB_s(w) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j}(w)[B_{t_{j+1}}(w) - B_{t_j}(w)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}}^2(w) - B_{t_j}^2(w))}_{\text{Série telescópica}} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}}(w) - B_{t_j}(w))}_{\text{Variância de } B_t} \right) \end{aligned}$$

Não sendo de todo trivial, pode ser mostrado que $\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}}(w) - B_{t_j}(w))$ converge para $Var(B_t)$ (Etheridge (2002)) e temos então que:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (B_{t_n}^2 - B_{t_0}^2) - \frac{t}{2} \\ &= B_t^2 - B_0^2 - \frac{t}{2} \\ &= B_t^2 - \frac{t}{2} \\ &= B_t^2 - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Outra forma de calcular este integral será mostrada mais à frente, recorrendo à fórmula de Itô.

De forma a obter mais detalhes sobre este assunto ver Etheridge (2002) e Mikosch (1998), por exemplo.

3.1.2 Integral de Itô

Os processos usados para modelar os preços de acções são geralmente funções de um ou mais MB, sendo a referência básica para essa modelação o MBG.

De uma forma muito geral, suponhamos que o preço de um activo é dado pela seguinte expressão:

$$S_t = f(t, B_t)$$

Utilizando a expansão formal em série de Taylor com duas variáveis, e assumindo que f é uma função regular,

C^2 , temos:

$$\begin{aligned} df(t, B_t) &\approx f(t + \delta_t, B_{t+\delta_t}) - f(t, B_t) = \delta_t \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) + (B_{t+\delta_t} - B_t) \frac{\partial f}{\partial B_t}(t, B_t) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, B_t) \delta_t^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial B_t \partial t}(t, B_t) \delta_t (B_{t+\delta_t} - B_t) + \frac{\partial^2 f}{\partial B_t^2}(t, B_t) (B_{t+\delta_t} - B_t)^2 \right) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) dt + \frac{\partial f}{\partial B_t}(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial B_t^2}(t, B_t) dt \end{aligned}$$

Pelo que chegamos à conhecida fórmula de Itô. Embora não seja feito neste trabalho, a derivação da fórmula de Itô pode ser encontrada em Etheridge (2002).

A seguinte tabela é de grande utilidade, uma vez que nos ajuda a simplificar os termos obtidos durante a expansão sua série de Taylor:

	\times	$\begin{matrix} dB_t & dt \\ dt & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$
$\begin{matrix} dB_t \\ dt \end{matrix}$		$\begin{matrix} dt & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

Esta expressão pode também ser escrita na sua fórmula integral, conhecida como integral de Itô:

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x, B_x) dx + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial B_x}(x, B_x) dB_x + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, B_x) dx$$

Desta forma, se considerarmos $S_t = f(t, B_t) = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$, utilizando a fórmula de Itô, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} dS_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) S_t dt + \sigma S_t dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \end{aligned}$$

Ou seja, obtemos o Movimento Browniano Geométrico.

Suponhamos agora que a variável S_t segue um Movimento Browniano Geométrico e que existe uma função G que depende de t e de S_t . Assim sendo, ao aplicarmos a fórmula de Itô a esta função obtemos:

$$\begin{aligned} dG &= \frac{\partial G}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial G}{\partial S_t}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}(t, S_t) (dS_t)^2 \\ &= \frac{\partial G}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial G}{\partial S_t}(t, S_t) (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}(t, S_t) (\mu^2 S_t^2 dt^2 + \sigma^2 dB_t^2 + 2\mu\sigma S_t^2 dt dB_t) \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial G}{\partial S_t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}(t, S_t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial G}{\partial S_t}(t, S_t) dB_t \end{aligned} \quad (3.1)$$

O Movimento Browniano Geométrico pode novamente servir de exemplo para esta derivação.

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ \Leftrightarrow \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dB_t \\ \Leftrightarrow d(\ln S_t) &= \mu dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

Consideremos então $G(t, S_t) = \ln S_t$. Desta forma, $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}$ e $\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2}$

Podemos agora voltar a calcular $\int_0^t B_s(w)dB_s(w)$

$S_t = B_t$, ou seja, $\mu = 0$ e $\sigma = 1$

$G(t, S_t) = \frac{1}{2}S_t^2$

$dS_t = dB_t$

Aplicando a fórmula 3.1 a estas condições temos:

$$\begin{aligned} dG &= d\left(\frac{1}{2}S_t^2\right) = d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) \\ &= \frac{1}{2}dt + S_t dB_t = \frac{1}{2}dt + B_t dB_t \\ \Leftrightarrow \int_0^t d\left(\frac{1}{2}B_x^2\right) &= \int_0^t \frac{1}{2}dx + \int_0^t B_x dB_x \\ \Leftrightarrow \int_0^t B_s dB_s &= \frac{1}{2}(B_t^2 - t) \end{aligned}$$

3.1.3 Equações Diferenciais Estocásticas

Consideremos primeiro a equação diferencial determinística, onde a função $\mu(t, S_t)$ é representada em função do tempo e de S_t :

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt$$

A forma mais fácil de introduzir aleatoriedade nesta equação é tornar a condição inicial aleatória. Assim, a solução S_t torna-se um processo estocástico:

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t)dt \\ S_0(w) = Y(w) \end{cases}$$

Uma equação deste tipo é uma equação diferencial aleatória, mas a sua solução não precisa de cálculo estocástico. Equações diferenciais aleatórias podem ser consideradas como equações diferenciais determinísticas com perturbação na condição inicial. No entanto, vamos considerar que a aleatoriedade na equação diferencial é introduzida através de um termo adicional:

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t \\ S_0(w) = Y(w) \end{cases} \quad (3.2)$$

Definimos assim equação diferencial estocástica, em \mathbb{R} .

A teoria sobre equações diferenciais estocásticas aqui apresentada foi baseada em Mikosch (1998).

Novamente, B_t representa um MB e as funções $\mu(t, S_t)$ e $\sigma(t, S_t)$ são funções determinísticas. A solução S_t , se existir, será um processo estocástico. A aleatoriedade da solução resulta de dois factores: do facto da condição inicial ser aleatória e do ruído introduzido pelo MB.

De uma forma muito simples podemos dizer que uma pequena variação de S_t (dS_t) é causada por uma pequena variação do tempo (dt) segundo um factor $\mu(t, S_t)$ juntamente com uma pequena variação do MB (dB_t) segundo um factor $\sigma(t, S_t)$. A interpretação desta equação diferencial pode ser feita através da equação integral estocástica seguinte, a qual dá pelo nome de equação diferencial estocástica de Itô:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(s, S_s) ds + \int_0^t \sigma(s, S_s) dB_s$$

Neste trabalho será então considerado apenas um tipo de soluções para estas equações, as soluções fortes.

Definição 3.2 *Uma solução forte para a equação diferencial estocástica de Itô é um processo estocástico $S = (S_t, t \in [0, T])$ que satisfaz as seguintes condições:*

- S é função de um Movimento Browniano B_s no tempo $s \leq t$
- Os integrais presentes na equação estão bem definidos como integrais de Riemman e de Itô, respectivamente
- S é uma função do caminho Browniano associado à equação e das funções $\mu(s, S_s)$ e $\sigma(s, S_s)$
- Por fim, S tem que satisfazer (3.2).

O seguinte teorema dá-nos condições de existência e unicidade de soluções do tipo forte para estas equações.

Teorema 3.1 *Assuma-se que a condição inicial S_0 tem segundo momento finito e é independente de $(B_t, t \geq 0)$.*

Assuma-se ainda que os coeficientes μ e de σ , definidos em $[0, T] \times \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

1. *São contínuos na primeira variável.*
2. *Satisfazem a condição de Lipschitz uniformemente em $t \in [0, T]$, em ordem à segunda variável, isto é:*
 $\exists K$, tal que, $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$, $\forall t \in [0, T]$

Segundo estas condições a equação diferencial estocástica de Itô tem uma única solução forte, S_t em $[0, T]$

A fórmula de Itô, deduzida anteriormente, pode ser aplicada na resolução de equações diferenciais estocásticas lineares. Uma equação diferencial estocástica linear tem a seguinte forma integral:

$$S_t = S_0 + \int_0^t (\mu_1(x)S_x + \mu_2(x)) dx + \int_0^t (\sigma_1(x)S_x + \sigma_2(x)) dB_x, t \in [0, T]$$

Pode-se provar que esta equação tem uma solução forte única (Mikosch (1998)).

Vamos então tomar particular atenção ao caso da equação linear homogénea. Uma vez que a designação de homogénea deriva do facto de $\mu_2(t) = \sigma_2(t) = 0$, obtemos então:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 + \int_0^t (\mu_1(x)S_x + \mu_2(x))dx + \int_0^t (\sigma_1(x)S_x + \sigma_2(x))dB_x \\ \Leftrightarrow dS_t &= \mu_1(t)S_t dt + \sigma_1(t)S_t dB_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se considerarmos $S_0 = 1$:

$$S_t = 1 + \int_0^t \mu_1(x)S_x dx + \int_0^t \sigma_1(x)S_x dB_x$$

Como a solução esperada para esta equação é da forma exponencial, vamos assumir também que $S_t > 0$, o que nos permite considerar $X_t = \ln S_t = f(S_t)$. Aplicando a fórmula de Itô a esta função, obtemos:

$$dX_t = (\mu_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(t))dt + \sigma_1(t)dB_t$$

onde $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2}$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= (\mu_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(t))dt + \sigma_1(t)dB_t \\ \Leftrightarrow \ln S_t &= \int_0^t \mu_1(x) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(x)dx + \int_0^t \sigma_1(x)dB_x \\ \Leftrightarrow S_t &= S_0 e^{\int_0^t \mu_1(x) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(x)dx + \int_0^t \sigma_1(x)dB_x} \end{aligned}$$

No caso em que $\mu_1(t)$ e $\sigma_1(t)$ são constantes estamos perante uma situação em que o Movimento Browniano Geométrico é a única solução forte desta equação diferencial. Este exemplo tem grande importância no que diz respeito a aplicações financeiras.

3.1.4 Equação de Black-Scholes

Começemos por fazer uma pequena introdução ao problema financeiro que a Equação de Black-Scholes modela.

Tal como até aqui, S_t representa o preço de um activo financeiro, no instante t e o seu valor é dado, tal como já referido anteriormente, por um MBG. Tal como descrito anteriormente, o MBG é a única solução forte da equação diferencial estocástica homogénea no caso em que tanto μ como σ são constantes. O diferencial

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (3.4)$$

representa uma pequena variação do preço do activo no intervalo de tempo $[t, t + dt]$, o que quer dizer que a equação (3.4) é equivalente a:

$$\begin{aligned} S_{t+dt} - S_t &\approx \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ \Leftrightarrow \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} &\approx \mu dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

O termo $\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}$ representa o retorno relativo do activo no intervalo $[t, t + dt]$, ou seja, existe uma tendência linear μdt perturbada por um termo estocástico σdB_t (Mikosch (1998)). μ é chamado taxa de retorno médio e σ representa a volatilidade. Este último parâmetro tem extrema importância no mundo financeiro. A volatilidade representa a intensidade e a frequência das oscilações dos preços de mercado de um activo financeiro. A volatilidade de um activo é um dos parâmetros mais utilizados para medir o risco do mercado. No caso em que consideramos $\sigma = 0$, estamos perante uma equação diferencial determinística, cuja solução é conhecida: $S_t = S_0 e^{\mu t}$.

No caso de $\sigma > 0$ esperamos obter uma função exponencial com uma perturbação aleatória.

Antes de começarmos a derivação da equação diferencial de Black-Scholes, não nos podemos esquecer de definir um conceito financeiro que será essencial para o desenrolar deste trabalho: o conceito de opção.

Uma opção, além de ser um produto derivado, é um contrato entre um comprador e um vendedor que dá ao comprador o direito, mas não a obrigação, de vender ou comprar um determinado activo na data de maturidade (T) da opção, por um preço K , denominado preço de exercício. Existem vários tipos de opções, no entanto, neste trabalho vamos ficar pelas mais elementares: opções de compra, ou *calls*, e opções de venda, ou *puts*. Por serem os tipos mais simples de opções, as *calls* e as *puts* são muitas vezes designadas por opções *vanilla*, ou opções padrão. Podemos ainda distinguir as opções financeiras em relação as datas de exercício das mesmas. Desta forma, existem duas grandes famílias de opções: Europeias e Americanas. As primeiras apenas podem ser exercidas quando a data de maturidade é atingida. No que diz respeito às segundas, estas podem ser exercidas em qualquer momento anterior à data de maturidade (Wilmott (2006)). Neste trabalho apenas serão considerados modelos e exemplos que tenham por base opções Europeias. Sem perda de generalidade, suponhamos que estamos perante uma *call option*. Uma vez que o detentor desta opção não é obrigado a exercê-la na sua data de maturidade, deve então ter em atenção quais as melhores condições para exercer a dita opção. O caso em que o valor do activo na data de maturidade (S_T) é inferior ao preço de exercício (K) representa uma situação em que o detentor da opção perderia dinheiro. Este é um caso em que não compensa que a opção seja exercida. Caso contrário, o exercício dessa opção é aconselhado e será obtido um lucro de $S_T - K$. Desta forma, uma *call* terá o seguinte valor na sua data de maturidade:

$$C(T) = (S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}^1$$

Também não podemos deixar de ter em conta um conjunto de condições assumidas à partida para este modelo. Condições estas que tornariam ideal qualquer mercado financeiro e que são apresentadas de seguida:

- Os empréstimos são realizados com uma taxa de juro livre de riscos, constante e conhecida.

¹Por seu lado, o valor de uma put é dado por: $P(T) = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+$. Além disso, as condições em que é proveitoso exercer uma *put* são contrárias às da *call*. Ou seja, a *put* deve ser exercida na sua data de maturidade apenas se o valor do activo for inferior ao preço de exercício. É de notar que para as mesmas condições, os valores de uma *call* e de uma *put* satisfazem a seguinte condição: $C(T) - P(T) = S_T - K e^{-r(T-t)}$

- O preço do activo segue um MBG com μ e σ constantes (como já havia sido referido anteriormente).
- As transacções financeiras não apresentam custos.
- Não existem dividendos² a pagar.
- A venda a descoberto de activos financeiros, isto é, venda de um activo que não se possui esperando que o seu preço venha a descer no futuro de forma a comprá-lo novamente e desta maneira lucrar com esta transacção, não apresenta qualquer tipo de restrições.

Pretende-se mostrar que o preço de uma opção varia apenas com o preço do activo que lhe dá origem e com o tempo decorrido até à maturidade da mesma.

De acordo com as condições anteriores, se considerarmos que possuímos um activo livre de riscos (obrigação), isto é, um activo cujo retorno futuro é conhecido com certeza, temos que um investimento β_0 em obrigações dá origem a uma quantia

$$\beta_t = \beta_0 e^{rt}$$

Aqui r representa a taxa de juros aplicada. Note-se que β_t satisfaz a equação:

$$\begin{aligned} \beta_t &= \beta_0 + r \int_0^t \beta_x dx \\ \Leftrightarrow d\beta_t &= r\beta_t dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

Suponhamos agora que pretendemos vender uma opção $V(S_t, t)$, e que assim constituímos o nosso portfólio Π_t . Ou seja, o nosso portfolio será constituído por uma posição curta³ da opção:

$$\Pi_t = -V(S_t, t)$$

Por outro lado, é usual querermos salvaguardar uma determinada quantidade de activos a_t , para compensar a posição tomada pela opção, pelo que o nosso portfólio será na realidade:

$$\Pi_t = -V(S_t, t) + a_t S_t$$

Os incrementos no valor do nosso portfólio resultam apenas de variações nos preços de S_t e $V(S_t, t)$, pelo que temos:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= d(-V(S_t, t) + a_t S_t) \\ &= -dV(S_t, t) + a_t dS_t \\ &= -\frac{\partial V}{\partial t} dt - \mu \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t dt - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt - \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dB_t + a_t (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) \end{aligned}$$

²Dividendos corresponde a uma parte dos lucros de uma empresa que são distribuídos pelos accionistas

³Possuir uma posição curta consiste em contrair um empréstimo de um activo e vendê-lo no mercado, esperando poder recomprá-lo mais tarde, por um preço inferior ao da venda, para que se possa devolvê-lo ao proprietário

Uma vez que pretendemos que o nosso portfólio seja livre de riscos, devemos eliminar o factor que introduz aleatoriedade ao processo, dB_t .

Olhando novamente para a equação, apenas existem duas parcelas que dependem de dB_t . De forma a eliminar este factor estas duas parcelas devem ser simétricas. Assim sendo, devemos considerar que a quantidade de activos, a_t , que pretendemos salvaguardar deve ser $\frac{\partial V}{\partial S_t}$.

Obtemos então que a variação no valor do portfólio será:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= -\frac{\partial V}{\partial t}dt - \mu \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t dt - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt + \mu \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t dt \\ &= -\frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

Uma vez que o nosso portfólio já se encontra livre de riscos, podemos saber exactamente qual será o seu valor no futuro. Utilizando a expressão (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= r\Pi_t dt \\ &= r(-V(S_t, t) + \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Igualando (3.6) e (3.7) temos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t}dt - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt &= r(-V(S_t, t) + \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t) dt \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} &= r(V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t) \end{aligned}$$

E assim deduzimos a Equação Diferencial de Black-Scholes (Hull (2006)).

Assim sendo, as fórmulas que se obtêm, através desta equação diferencial parcial, para precificar opções *vanilla* europeias são:

$$\begin{aligned} C &= S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\ P &= K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

respectivamente para opções de compra e de venda, e onde $N(x)$ representa a função de probabilidade acumulada de uma distribuição Normal padrão e

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

A derivação destas soluções pode ser encontrada, por exemplo, em Hull (2006).

3.2 Modelos de Difusão com Saltos

3.2.1 Processo e Saltos de Poisson

Na secção anterior modelámos processos estocásticos como sendo funções diferenciáveis de MB e de MBG. Estes processos são construídos sobre condições ideais do mercado, seguindo desta forma uma distribuição Log-

Normal, ou seja, os preços dos activos financeiros podem ser gerados através de caminhos contínuos.

No entanto, o mercado está longe da perfeição em que as condições de Black-Scholes são aplicadas, e os valores de mercado sofrem oscilações constantes o que leva a que sejam provocadas descontinuidades nos preços dos activos, e consequentemente à impossibilidade de aplicação da equação de Black-Scholes no processo de precificação dos mesmos. Por outras palavras, estas oscilações provocam saltos nos preços em questão e um novo método de valorização deve ser aplicado (Wilmott (2006)).

O novo processo que define a variação total do preço do activo é então composto por duas partes distintas: a primeira parte é modelada a partir de um MBG e o seu comportamento é em tudo semelhante ao comportamento dos processos estudados na secção anterior. A segunda parte deste processo tem origem em informação adicional sobre o preço do activo. Informação esta que provocará os referidos saltos no modelo. Estes saltos ocorrem em instantes de tempo aleatórios. Por forma a construir um modelo com saltos, devemos acrescentar ao processo anterior mais um processo estocástico. Devido às suas características o mais adequado a utilizar será o Processo de Poisson, que se pode definir da seguinte forma:

Definição 3.3 (Processo de Poisson) *Um processo de Poisson com taxa λ é um processo de contagem, em tempo contínuo, $\{N_t, t > 0\}$ que respeita as seguintes propriedades:*

- *O processo possui incrementos independentes, ou seja, os eventos que ocorrem em intervalos de tempo disjuntos são independentes entre si.*
- *O processo tem incrementos estacionários, ou seja, a distribuição do número de eventos num intervalo de tempo apenas depende do tamanho desse mesmo intervalo e não do instante em que o intervalo termina.*
- *A probabilidade de ocorrência de um único acontecimento num intervalo de tempo $[x, x + h]$ é:*

$$P[N(h) = 1] = \lambda h$$

- *A probabilidade de ocorrerem vários acontecimentos simultaneamente é nula.*

Os saltos podem ter amplitudes constantes ou aleatórias e o tempo de chegada dos saltos segue uma distribuição de Poisson. O processo de Poisson pode ser utilizado de várias maneiras, de forma a representar os saltos discretos ao longo do tempo. A maneira mais simples passa por considerar um processo de Poisson onde a probabilidade de ocorrer um evento, durante um intervalo de tempo infinitesimal, dt , é dada pela seguinte expressão:

$$dq = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } 1 - \lambda dt \\ 1, & \text{com probabilidade } \lambda dt \end{cases}$$

Ou seja, o incremento aleatório dq pode ser zero, o que leva a que o processo se resume a um MB original, ou pode ser um, o que implica que ocorra um salto, de uma determinada amplitude, no processo de precificação do activo. As amplitudes consideradas serão representadas pela variável aleatória J e descrevem o impacto que cada salto inflige ao preço do activo. Esta amplitude será independente, tanto em relação ao MB como em relação ao Processo de Poisson.

Desprezemos agora a parte contínua do modelo de valorização do activo, ou seja, a parte do processo que é modelada a partir do MBG. Desta forma, o preço deste mesmo activo no instante de tempo $t + dt$ será a variável $S_{t+dt} = JS_t$. Esta afirmação leva-nos a concluir que a parte discreta do modelo será dada por:

$$\begin{aligned}
S_t + dS_t &= S_{t+dt} \\
\Leftrightarrow dS_t &= S_{t+dt} - S_t = JS_t - S_t = (J - 1)S_t
\end{aligned}$$

Assumimos à partida que $J \geq 0$. Também devemos ter em conta que ocorrências sucessivas de saltos, que podemos representar pela família de variáveis aleatórias $\{J_n\}_{n \geq 0}$, são independentes e identicamente distribuídas.

No entanto ambas as partes são precisas para a construção da equação diferencial estocástica, de forma a contruir um modelo de difusão de saltos. O primeiro deste tipo de modelos foi proposto por Robert Merton (Merton (1976)). Este modelo é uma extensão do até então utilizado modelo de Black-Scholes e pressupõe que o MB e o Processo de Poisson são independentes. A equação diferencial seguinte representa o modelo em questão:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_t + (J - 1)S dq$$

Podemos encontrar uma ilustração de modelo na Figura (3.2)

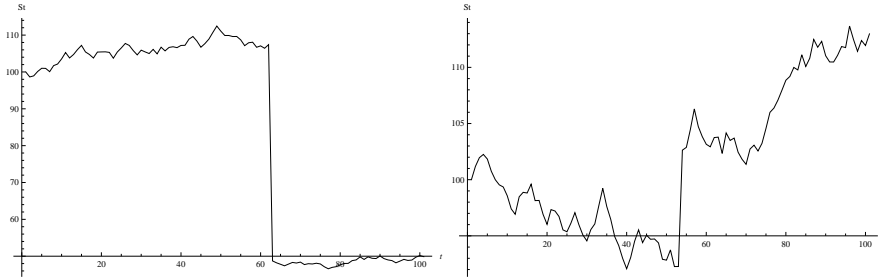


Figura 3.2: Simulações de preços de activos segundo um modelo com saltos de Poisson

Uma vez que, tal como foi dito anteriormente, os saltos ocorrem em instantes aleatórios de tempo, o conjunto formado por estes instantes será um conjunto de medida nula, pelo que o caminho construído para valorizar S_t será contínuo quase em toda a parte.

Porém, existe uma observação que deve ser feita. No MB normal $\mu = r$, pois r , a taxa de juro aplicada, representa, também, o retorno esperado instantâneo do activo, para um activo livre de riscos, ou seja, $E[\frac{dS}{S}] = r dt$. Quando queremos tratar de outro tipo de processos, como é o caso do processo de difusão com saltos, esta igualdade não é aplicada à partida. Devemos aqui introduzir um novo conceito, o de *martingala equivalente*, que pode ser encontrado em Cont and Tankov (2004):

Proposição 3.1 *Seja o espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Dizemos que P é equivalente a Q , o que representamos por $P \sim Q$, se*

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \text{ e } E^Q[S_t | \mathcal{F}_t] = S_t,$$

ou seja, se o preço do activo, S_t , for uma martingala, segundo a medida Q .

Segundo esta proposição, para o modelo de difusão com saltos, $\mu = r - \lambda k$, onde k é definido como sendo o valor esperado da amplitude do salto ($k = E[J - 1]$). A subtracção do factor λk visa corrigir o enviesamento existente pelo facto do valor esperado do Processo de Poisson ser não nulo ($E[dq] = \lambda dt + (1 - \lambda dt)0 = \lambda dt$)

e desta forma altera o resultado previsto para o valor esperado do retorno realtivo do activo. Caso esta subtracção não fosse executada, o valor esperado do preço de um activo, segundo um modelo de difusão com saltos, não seria igual ao valor esperado obtido quando o preço do activo segue um MB, ou seja, o processo em questão não seria uma martingala, tal como é desejado. Mostremos então que ao tomarmos tal valor para μ obtemos os resultados pretendidos. Tomando o valor esperado do retorno relativo de um activo que segue um processo de difusão com saltos obtemos:

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{dS}{S}\right] &= E[(r - \lambda k)dt + \sigma dB_t + (J - 1)dq] \\
 &= (r - \lambda k)dt + \sigma E[dB_t] + E[(J - 1)dq] \\
 &= (r - \lambda k)dt + 0 + E[Jdq - dq] \\
 &= (r - \lambda k)dt + E[Jdq] - E[dq] \\
 &= (r - \lambda k)dt + E[J]E[dq] - (0(1 - \lambda dt) + \lambda dt) \\
 &= (r - \lambda k)dt + (k + 1)\lambda dt - \lambda dt \\
 &= rdt
 \end{aligned}$$

Concluimos então que a equação diferencial pode ser escrita como:

$$dS = (r - \lambda k)Sdt + \sigma SdB_t + (J - 1)Sdq$$

3.2.2 Integral de Itô e Saltos de Poisson

Sabemos que os novos preços dos activos são gerados a partir da equação diferencial:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t + (J - 1)S_t dq$$

Também é do nosso conhecimento que se esta equação não apresentasse a componente discreta, que provoca os saltos ao processo, apenas admitiria uma única solução forte, o Movimento Browniano Geométrico.

No entanto, existe mais uma parcela a ter em consideração. De forma a acharmos uma solução para esta equação devemos analisar o integral estocástico relativo ao processo de Poisson em questão.

Temos então a equação na forma diferencial,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t + (J - 1)S_t dq$$

Escrevendo a equação na forma de integral, obtemos:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_x dx + \int_0^t \sigma S_x dB_x + \int_0^t (J - 1)S_x dq$$

Tal como foi realizado na resolução da equação diferencial estocástica (3.3), vamos considerar que $S_0 = 1$. Obtemos desta forma,

$$S_t = 1 + \int_0^t \mu S_x dx + \int_0^t \sigma S_x dB_x + \int_0^t (J - 1)S_x dq$$

Não podemos deixar de ter em conta a nova parcela introduzida neste processo. Esta nova parcela não é mais do que a soma das descontinuidades provocadas aleatoriamente no preço do activo pelo que iremos interpretar o seu integral como uma soma dessas descontinuidades.

Assim sendo, segundo Cont and Tankov (2004)), o lema de Itô para processos de difusão com saltos é:

$$df(S_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \mu \frac{\partial f}{\partial S_t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial S_t} dB_t + [f(S_{t-} + \Delta S_t) - f(S_{t-})] \quad (3.9)$$

Notemos que S_{t-} representa o preço do activo imediatamente antes de ocorrer o salto e ΔS_t representa o tamanho, ou amplitude, do mesmo. Logo, no nosso caso, se um salto ocorrer o valor de S_t passa a ser JS_t , uma vez que o seu valor irá variar $(J - 1)S_t$.

Aplicando o Lema de Itô à parte contínua do diferencial, o teorema equivalente para o processo de Poisson, e considerando $f(S_t) = \ln(S_t)$ iremos obter:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t + (J - 1)S_t dq \\ \Leftrightarrow \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dB_t + (J - 1) dq \\ \Leftrightarrow d(\ln S_t) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t + \sum_{i=0}^{dq} (\ln(JS_t) - \ln(S_t)) \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t + (\ln(JS_t) - \ln(S_t)) dq \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t + \ln(JS_t/S_t) dq \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t + \ln(J) dq \\ \Leftrightarrow dS_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t dt + \sigma S_t dB_t + \ln(J) S_t dq \end{aligned}$$

Obtemos assim, a versão do Lema de Itô para processos de difusão com saltos, conforme Mikosch (1998).

Se pretendermos obter a solução para a equação diferencial estocástica, devemos ter em conta que, tal como anteriormente S_t será exponencial e teremos:

$$\ln S_t = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dx + \int_0^t \sigma dB_x + \int_0^t \ln J dq$$

Podemos então concluir que,

$$\begin{aligned} S_t &= e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t + \ln(J) dq} \\ &= e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t} J^{dq} \end{aligned}$$

3.2.3 Modelo de Merton

À semelhança da derivação da equação de Black-Scholes, também para os processos de difusão com saltos iremos obter a expressão correspondente à variação de um portfólio livre de riscos. Novamente iremos considerar que o nosso portfólio Π é constituído por uma opção $V(S_t, t)$ e por uma quantidade $-a_t$ de activos, ou seja:

$$\Pi = V(S_t, t) - a_t S_t$$

O preço do activo segue um processo de difusão com saltos, logo para obter a variação do valor deste portfólio precisamos utilizar a versão do Lema de Itô (3.9). Temos então:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt + \mu \frac{\partial \Pi}{\partial S_t} S_t dt + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S_t^2} S_t^2 dt + \sigma \frac{\partial \Pi}{\partial S_t} S_t dB_t + \sum_{i=1}^{dq} [\Pi(S_t + (J-1)S_t) - \Pi(S_t)] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} (V(S_t, t) - a_t S_t) + \mu \frac{\partial}{\partial S_t} (V(S_t, t) - a_t S_t) S_t + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} (V(S_t, t) - a_t S_t) S_t^2 \right] dt + \\ &\quad \sigma \frac{\partial}{\partial S_t} (V(S_t, t) - a_t S_t) S_t dB_t + \sum_{i=1}^{dq} [V(S_t + (J-1)S_t, t) - a_t (S_t + (J-1)S_t) - V(S_t, t) + a_t S_t] \\ &= \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial t} dt + \mu \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial S_t} S_t dt + \mu S_t a_t dt + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V(S_t, t)}{\partial S_t^2} S_t^2 dt + \sigma \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial S_t} S_t dB_t - \sigma a_t S_t dB_t + \\ &\quad \sum_{i=1}^{dq} [V(JS_t, t) - a_t(JS_t) - V(S_t, t) + a_t S_t] \\ &= \left[\frac{\partial V(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V(S_t, t)}{\partial S_t^2} \right] dt + \left(\frac{\partial V(S_t, t)}{\partial S_t} - a_t \right) [\mu S_t + \sigma S_t dB_t] + [V(JS_t, t) - V(S_t, t) - a_t S_t (J-1)] dq \end{aligned}$$

No caso em que não existem saltos, $dq = 0$, podemos escolher $a_t = \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial S_t}$ para conseguirmos eliminar todo o risco existente neste portfólio, tal como fizemos para a equação de Black-Scholes. Novamente, o risco do portfólio encontra-se associado ao processo dB_t , pois é este processo que introduz aleatoriedade ao portfólio.

No caso em que $dq \neq 0$, $a_t = \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial S_t}$ não elimina o risco existente na sua totalidade. Suponhamos que pretendemos eliminar a aleatoriedade causada pela parcela de difusão, dB_t , que se encontra sempre presente no processo, isto é, quer existam ou não saltos. Por agora podemos ignorar a aleatoriedade introduzida pela existência dos salto, uma vez que estes ocorrem com pouca frequência (Wilmott (2006)).

Voltemos, portanto, a considerar $a_t = \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial S_t}$. Assim a variação do nosso portfólio após a eliminação desta parte do risco é:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + (V(JS_t, t) - V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial t} (J-1)S_t) dq \quad (3.10)$$

Ao propor este modelo, Merton argumentou que o processo que define o salto no preço do activo não se encontra correlacionado com o mercado (Merton (1976)). Logo, o risco associado ao salto não pode ser considerado como sistemático, pelo que a sua existência pode não ser tida em conta. Ao procedermos desta forma, esperamos que a variação do nosso portfólio evolua segundo as regras aplicadas aos activos livres de riscos, ou seja,

$$E[d\Pi] = r\Pi dt \quad (3.11)$$

Assim, tomando os valores esperados na equação (3.10) e considerando que (3.11) se verifica, obtemos:

$$\begin{aligned}
 E[d\Pi] &= E\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt + (V(JS_t, t) - V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial t}(J-1)S_t)dq\right] \\
 r\Pi dt &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt + E\left[(V(JS_t, t) - V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial t}(J-1)S_t)dq\right] \\
 r(V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t}S_t)dt &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt + E[V(JS_t, t)dq - V(S_t, t)dq - \frac{\partial V}{\partial t}(J-1)S_t dq] \\
 rV(S_t, t)dt - r\frac{\partial V}{\partial S_t}S_t dt &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt + E[V(JS_t, t) - V(S_t, t)]\lambda dt - E\left[\frac{\partial V}{\partial t}(J-1)S_t\right]\lambda dt \\
 -rV(S_t, t) + r\frac{\partial V}{\partial S_t}S_t &+ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - \frac{\partial V}{\partial t}S_t E[J-1]\lambda = 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Mais uma vez, consideramos que $E[J-1] = k$. No caso em que não é esperado que ocorra um salto, por outras palavras, $\lambda = 0$, a equação diferencial acima, (3.12), não é mais do que a equação diferencial de Black-Scholes.

Uma vez que este modelo assume que as amplitudes dos saltos seguem uma distribuição log-normal, temos,

$$E[J-1] = k \Leftrightarrow E[J] - 1 = k \Leftrightarrow k = e^{\mu' + \frac{1}{2}(\sigma')^2} - 1$$

e ao assumirmos que J segue esta distribuição a equação diferencial pode ser resolvida por forma a obter as fórmulas de precificação para as opções europeias. Embora não seja mostrado como a obter, a solução pretendida é a seguinte (Wilmott (2006)):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1+k)(T-t)}}{i!} (\lambda(1+k)(T-t))^i V_{BS}(S_t, T-t, \sigma_i, r_i) \tag{3.13}$$

Nesta fórmula $\sigma_i^2 = \sigma^2 + \frac{i(\sigma')^2}{T-t}$, $r_i = r - \lambda k + \frac{i \ln(1+k)}{T-t}$ e V_{BS} é o valor da opção segundo o modelo de Black-Scholes.

3.3 Modelos com Volatilidade Estocástica

3.3.1 Volatilidade

A volatilidade é uma das possíveis medidas de risco do preço de um activo. Podemos dizer que a volatilidade representa a velocidade com que o mercado se movimenta. Desta forma, se estivermos perante uma volatilidade alta, tal acontecimento representa constantes agitações do mercado. O contrário verifica-se para valores baixos de volatilidade, ou seja, o mercado encontra-se pouco susceptível a alterações.

Mas, não podemos falar apenas em volatilidade no geral. Devemos sempre diferenciar os vários tipos de volatilidades existentes.

Os modelos clássicos de precificação de derivados, como é o caso do modelo de Black-Scholes, utilizam uma volatilidade dita constante. Nestes modelos é usual realizar uma estimativa da volatilidade a utilizar. Assim sendo, podemos calcular a *volatilidade histórica do activo*. Embora não se consiga prever o futuro do mercado, ao analisarmos atentamente o seu comportamento passado, podemos ser conduzidos a aproximações razoáveis sobre o seu comportamento futuro. Este tipo de volatilidade é definido como sendo o desvio padrão de uma série

de preços de activos medidos em intervalos regulares. O tamanho da amostra a utilizar revela-se um pouco difícil de definir. Embora se costume dizer que uma amostra de maior dimensão conduz a uma melhor aproximação, esta afirmação pode não ser totalmente correcta. Uma vez que a volatilidade do mercado nada tem de constante, dados muito antigos podem não ser úteis para o cálculo da estimativa do valor futuro (Hull (2006)). Notemos que, embora fosse mais correcto utilizarmos uma estimativa para a volatilidade, os resultados numéricos apresentados no capítulo (4) são calculados com uma volatilidade constante e com um valor de referência apenas a título de exemplo.

Outra forma de obtermos uma volatilidade consistente com os valores existentes no mercado passa por reverter um modelo de precificação, como por exemplo o modelo de Black-Scholes, em ordem à volatilidade. Esta volatilidade é conhecida como *volatilidade implícita*. Para a calcularmos, igualamos a equação de precificação ao valor de mercado e resolvemos a mesma em ordem à volatilidade. Este processo revela-se pouco trivial, uma vez que a reversão das equações de Black-Scholes, no caso da utilização deste modelo, é mesmo impossível (Hull (2006)).

No entanto, ao longo dos anos, e com o evoluir dos mercados, a volatilidade de um activo começa a evidenciar não ser uma quantidade constante mas sim uma quantidade que apresenta fortes variações ao longo do tempo. Ou seja, a volatilidade é por si só um processo estocástico. Desta forma, os modelos de precificação de derivados que utilizam volatilidade estocástica revelam-se mais precisos que os modelos clássicos e visam corrigir as incorrecções cometidas anteriormente.

3.3.2 Modelo de Heston

Vários estudos revelam que as distribuições de retornos logarítmicos não são gaussianas. Também se pode provar, que os retornos e as volatilidades implícitas se encontram muito negativamente correlacionados (Moodley (2005)). Estes acontecimentos vão contra as condições supostas pelo modelo de Black-Scholes. Mais uma vez, realizamos que se torna extremamente necessário a utilização de modelos de precificação que vão de encontro às crescentes necessidades do mercado.

O modelo proposto por Heston, em Heston (1993), enquadra-se nestes parâmetros. Além de se tratar de um modelo que utiliza volatilidade estocástica, pode também produzir uma enorme quantidade de distribuições distintas (Moodley (2005)). Um dos parâmetros deste modelo, ρ , pode ser visto como a correlação entre os retornos do activo que, tal como vimos até agora, são log-normais e a volatilidade dos mesmos. Uma vez que estamos perante uma volatilidade que por si só já é um processo estocástico, este modelo contará com a presença de duas equações diferenciais estocásticas para a sua modelação.

O modelo proposto é o seguinte:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dB_t^1 \quad (3.14)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dB_t^2 \quad (3.15)$$

$$dB_t^1 dB_t^2 = \rho dt \quad (3.16)$$

S_t e V_t representam, respectivamente, o preço do activo e a variância do mesmo. A variância, por sua vez, representa o quadrado da volatilidade. dB_t^1 e dB_t^2 são dois MB dependentes cujo coeficiente de correlação é ρ . Neste modelo, devido à volatilidade ser um processo estocástico, encontramos uma série de novos parâmetros relativos a este novo modelo. Assim sendo, κ representa a velocidade de reversão à média da variância. Quanto

mais altos são os valores de κ , maior é a força de atracção que é exercida para que a variância se aproxime da sua média. Por sua vez o parâmetro θ representa a média a longo prazo da variância. σ é a volatilidade da própria volatilidade, afectando o pico e as caudas da distribuição desta última. No caso de termos $\sigma = 0$, estamos perante uma volatilidade determinística, ou seja, é esperado que a distribuição dos retornos seja normal. Por outro lado, se aumentarmos o valor de σ os picos da distribuição tendem a ser maiores bem como as caudas das mesmas tendem a ficar mais pesadas. σ a crescer representa uma maior volatilidade para os preços das opções. Por outras palavras, revela movimentos mais bruscos do mercado. Por último encontramos ρ . Este parâmetro, além de ser o factor de correlação entre os MB necessários a este processo, influencia a forma das superfícies de volatilidade. No caso de $\rho > 0$ estamos perante um crescimento simultâneo da volatilidade e dos retornos do activo. Se pelo contrário ρ apresentar valores negativos temos que a volatilidade e os retornos em questão diminuem, encontrando-se negativamente correlacionados (Moodley (2005)).

Para mais detalhes sobre este tema pode ser consultado também Gatheral (2006).

3.3.3 Aproximação por Equação Diferencial Parcial

Tal como para os outros dois casos anteriores vejamos como aproximar a equação diferencial parcial associada ao modelo de Heston. De igual forma, o valor do portfólio livre de riscos é calculado da mesma maneira que em Black-Scholes. O que varia é a sua construção. Enquanto nos modelos anteriores possuíamos um activo para uma fonte de risco (recordemos que no caso dos saltos uma das fontes de risco tornava-se desprezável pelo facto de ocorrer de forma completamente irregular). Neste modelo, temos um activo para duas fontes de risco, e neste caso nenhuma das duas pode ser ignorada. Estamos perante um caso em que o mercado é incompleto⁴. Assim, os argumentos usados até aqui não chegam, pelo que necessitamos de pressupostos adicionais.

Podemos completar o mercado. Para tal necessitamos possuir dois activos. Para além do nosso activo de referência, S_t , vamos adicionar ao nosso portfólio uma opção G cujo valor dependa da variância do processo, tal como podemos encontrar em Wilmott (2006), Gatheral (2006) e Xu (2005). Assim sendo, o nosso portfólio irá consistir numa opção F , numa quantidade $-a_t$ de activos, S_t , e numa quantidade de $-b_t$ de opções G , logo

$$\begin{aligned} \Pi &= F - a_t S_t - b_t G \\ \Leftrightarrow d\Pi &= dF - a_t dS_t - b_t dG \end{aligned} \quad (3.17)$$

Neste modelo, F e G não dependem apenas do preço do activo, S_t , mas também da variância a ele associada, V_t , pelo que o lema de Itô unidimensional, que utilizámos até agora, não pode ser aplicado, pois estas opções dependem de dois processos. Precisamos então introduzir a versão multidimensional deste lema (por exemplo, Reis (2004) e Bandeiras (2006)).

Teorema 3.2 (Lema de Itô Multidimensional) *Seja $f(t, x)$ uma função contínua definida em $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ com valores em \mathbb{R}^k e com derivadas parciais contínuas e $X(t)$ um processo definido em $[t_0, T]$ com valores em \mathbb{R}^d e com diferencial estocástico:*

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

⁴um mercado diz-se completo, em relação a uma dada estratégia de negócios se existir uma estratégia de negócios "autónoma" tal que, num determinado tempo t os retornos das duas estratégias sejam iguais.

onde B_t representa um MB m -dimensional e cada componente de $X(t)$ deve satisfazer:

$$\begin{cases} dX_1 = \mu_1 dt + \sigma_{11} dB_1 + \dots + \sigma_{1m} dB_m \\ \dots \\ dX_d = \mu_d dt + \sigma_{d1} dB_1 + \dots + \sigma_{dm} dB_m \end{cases} \quad (3.18)$$

Temos então que o processo k -dimensional $Y_t = f(t, X_t)$ definido em $[t_0, T]$ com valor inicial $Y(t_0) = f(t_0, X_{t_0})$ possui o diferencial estocástico:

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dX_i dX_j$$

Para calcular $dX_i dX_j$ utilizaram-se as regras seguintes, considerando $i \neq j$:

\times	dt	dX_t^i	dX_t^j
dt	0	0	0
dX_t^i	0	dt	0
dX_t^j	0	0	dt

Aplicando ao caso em questão obtemos

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Pi}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial \Pi}{\partial V_t} dV_t + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial V_t^2} (dV_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S_t \partial V_t} dV_t dS_t \right] \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial t} - b_t \frac{\partial G}{\partial t} \right] dt + \left[\frac{\partial F}{\partial S_t} - a_t - b_t \frac{\partial G}{\partial S_t} \right] dS_t + \left[\frac{\partial F}{\partial V_t} - b_t \frac{\partial G}{\partial V_t} \right] dV_t \\ &+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} - b_t \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial V_t} \right] dS_t dV_t + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} - b_t \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} \right] (dS_t)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} - b_t \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} \right] (dV_t)^2 \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial t} - b_t \frac{\partial G}{\partial t} \right] dt + \left[\frac{\partial F}{\partial S_t} - a_t - b_t \frac{\partial G}{\partial S_t} \right] dS_t + \left[\frac{\partial F}{\partial V_t} - b_t \frac{\partial G}{\partial V_t} \right] dV_t \\ &+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} - b_t \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial V_t} \right] V_t S_t \sigma dB_1 dB_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} - b_t \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} \right] V_t S_t^2 dt + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} - b_t \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} \right] \sigma^2 V_t dt \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t \right] dt - b_t \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t \right] dt \\ &+ \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial S_t} - a_t - b_t \frac{\partial G}{\partial S_t} \right] dS_t}_{(*)} + \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial V_t} - b_t \frac{\partial G}{\partial V_t} \right] dV_t}_{(**)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como para obtermos um portfólio livre de riscos devemos eliminar todas as fontes de riscos de forma a apenas nos restarem factores determinísticos, vamos considerar que $(*)=0$ e $(**)=0$. Assim, se resolvermos estas expressões em ordem a a_t e b_t vamos ter,

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{\partial F}{\partial S_t} - \frac{\partial G}{\partial S_t} \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} \\ b_t &= \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} \end{aligned}$$

Uma vez que eliminamos o risco existente no nosso portfólio podemos agora considerar, a semelhança do já feito nos outros dois modelos, que

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (3.20)$$

Se agora substituirmos a_t e b_t em (3.19) e igualarmos tudo isto a (3.20), tendo em atenção que o nosso portfólio é dado pela equação (3.17), vamos obter a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t \right] dt - \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t \right] dt + \left[\frac{\partial F}{\partial S_t} - \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{\partial G}{\partial S_t} \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} - \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} \frac{\partial G}{\partial S_t} \right] dS_t + \left[\frac{\partial F}{\partial V_t} - \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} \frac{\partial G}{\partial V_t} \right] dV_t = r \Pi dt \\
 & \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t - r \Pi \\
 & = \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t \right] \\
 & \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t \\
 & - r \left[F - \left(\frac{\partial F}{\partial S_t} - \frac{\partial G}{\partial S_t} \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} \right) S_t - \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} G \right] = \frac{\partial F}{\partial V_t} / \frac{\partial G}{\partial V_t} \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t \right] \\
 & \Leftrightarrow \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t - r F + r S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} \right] / \frac{\partial F}{\partial V_t} \\
 & = \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t - r G + r S_t \frac{\partial G}{\partial S_t} \right] / \frac{\partial G}{\partial V_t}
 \end{aligned}$$

Esta equação apenas será satisfeita se ambos os lados forem iguais a uma função $-x(t, S_t, V_t)$, que será independente de qualquer opção.

Assim sendo, para a opção a que pretendemos atribuir um valor, F , vamos ter:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t - r F + r S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} = -x(t, S_t, V_t) \frac{\partial F}{\partial V_t}$$

Sem perda de generalidade podemos considerar que $x(t, S_t, V_t) = \kappa(\theta - V_t) - \sigma \sqrt{V_t} \Lambda(t, S_t, V_t)$, onde $\Lambda(t, S_t, V_t)$ representa o preço do risco da volatilidade (Gatheral (2006)), e o seu valor revela-se quase impossível de estimar. Mais ainda, segundo Heston (1993), o valor de $\Lambda(t, S_t, V_t)$ deverá ser proporcional à variância, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \Lambda(t, S_t, V_t) &= c \sqrt{V_t} \\
 \Lambda(t, S_t, V_t) \sigma \sqrt{V_t} &= c \sigma V_t \\
 &= \lambda V_t
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Assim sendo, o valor de qualquer opção F deverá satisfazer a equação diferencial parcial seguinte:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t - r F + r S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} = -(\kappa(\theta - V_t) - \sigma \sqrt{V_t} \Lambda(t, S_t, V_t)) \frac{\partial F}{\partial V_t} \tag{3.22}$$

Por fim, se substituirmos (3.21) em (3.22) obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t \partial V_t} V_t S_t \sigma \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t - r F + r S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} + (\kappa(\theta - V_t) - \lambda V_t) \frac{\partial F}{\partial V_t} = 0 \tag{3.23}$$

Note-se que não consideramos nas equações (3.14) e (3.15) este parâmetro representativo do risco da volatilidade. No entanto, nos modelos implementados, ele encontra-se implícito, apresentado numa versão mais fácil de trabalhar. Tudo isto se relaciona com o problema já abordado na secção anterior relativo ao facto de o retorno esperado instantâneo de um activo livre de riscos ter que satisfazer:

$$E\left[\frac{\partial S_t}{S_t}\right] = r dt$$

No modelo com saltos de Poisson bastou-nos subtrair o valor esperado do processo de Poisson. Neste modelo as coisas não se resolvem tão facilmente, pois possuímos dois processos estocásticos, duas fontes de riscos, distintas e onde nenhuma pode ser desprezada.

Consideremos então os novos processos

$$d\tilde{B}_t^1 = dB_t^1 + \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} dt$$

$$d\tilde{B}_t^2 = dB_t^2 + \Lambda(t, S_t, V_t)$$

Se substituirmos estes novos processos nas equações (3.14) e (3.15) iremos obter novas equações para o activo e para a variância, mas na medida correcta. Assim obtemos:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t (d\tilde{B}_t^1 - \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} dt) \quad (3.24)$$

$$(3.25)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) + \sigma\sqrt{V_t}(d\tilde{B}_t^2 - \Lambda(t, S_t, V_t)) \quad (3.26)$$

Utilizando (3.24) temos que o retorno esperado instantâneo será:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] &= E\left[\mu dt + \sqrt{V_t}(d\tilde{B}_t^1 - \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} dt)\right] \\ &= E\left[\mu dt \sqrt{V_t} d\tilde{B}_t^1 - \sqrt{V_t} \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} dt\right] \\ &= E\left[\sqrt{V_t} d\tilde{B}_t^1 + r dt\right] \\ &= \sqrt{V_t} E[d\tilde{B}_t^1] + E[r dt] \\ &= E[r dt] = r dt \end{aligned}$$

E assim obtemos o resultado pretendido. Para o caso da variância vamos ter a expressão:

$$\begin{aligned} dV_t &= \kappa(\theta - V_t) + \sigma\sqrt{V_t}(d\tilde{B}_t^2 - \Lambda(t, S_t, V_t)dt) \\ &= \kappa(\theta - V_t) + \sigma\sqrt{V_t}d\tilde{B}_t^2 - \sigma\sqrt{V_t}\Lambda(t, S_t, V_t)dt \\ &= (\kappa(\theta - V_t) - \lambda V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}d\tilde{B}_t^2 \\ &= (\kappa\theta - (\kappa + \lambda)V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}d\tilde{B}_t^2 \\ &= (\kappa + \lambda)\left(\frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda} - V_t\right)dt + \sigma\sqrt{V_t}d\tilde{B}_t^2 \end{aligned}$$

Se considerarmos $\kappa^* = k + \lambda$ e $\theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa+\lambda}$ obtemos uma equação semelhante a (3.15) mas utilizando a medida correcta, ou seja,

$$dV_t = \kappa^*(\theta^* - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}d\tilde{B}_t^2$$

Sempre que utilizarmos o modelo de Heston, quer para resultados numéricos quer para a posterior calibração do modelo iremos utilizar os valores de κ^* e de θ^* sempre como um "todo", ou seja, não consideramos os valores de κ , θ e λ em separado, até pelo facto de o valor de λ não ser fácil de determinar (Moodley (2005)).

3.3.4 Soluções de Forma Fechada

Heston (1993) resolve esta equação para opções de compra europeias, sendo a solução obtida algo semelhante à solução apresentada por Black-Scholes:

$$C(t, S_t, V_t) = S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2 \quad (3.27)$$

Nesta solução os parâmetros P_1 e P_2 representam, respectivamente, o delta⁵ de uma opção de compra europeia e a probabilidade condicional de o preço do activo ser superior ao respectivo preço de exercício assumindo condições de neutralidade de risco. Tanto P_1 como P_2 satisfazem a equação diferencial parcial (3.23), sendo que, embora não se demonstre neste trabalho, a solução encontrada para estes valores é, segundo Heston (1993):

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(\ln(S_t), V_t, T, \phi)}{i\phi} \right] d\phi$$

onde,

$$\begin{aligned} f_j(\ln(S_t), V_t, T, \phi) &= e^{C(T-t, \phi) + D(T-t, \phi)V_0 + i\phi \ln(S_0)} \\ C(T-t, \phi) &= r\phi i(T-t) + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} [(b_j - \rho\sigma\phi i + d)(T-t) - 2\ln(\frac{1 - ge^{d(T-t)}}{1-g})] \\ D(T-t, \phi) &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d(T-t)}}{1 - ge^{d(T-t)}} \right] \\ g &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d} \\ d &= \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, b_1 = \kappa^* - \rho\sigma, b_2 = \kappa^* \quad (3.29)$$

Finalmente, a preço das opções de venda pode ser retirado através da fórmula de precificação das opções de compra, se utilizarmos a já referida expressão:

⁵O delta de uma opção mede a taxa de mudança de valor da opção em relação às mudanças no preço do activo subjacente a esta mesma opção.

$$C(T) - P(T) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

pelo que obtemos a seguinte expressão para o preço das opções de venda:

$$\begin{aligned} S_t P_1 - Ke^{-r(T-t)} P_2 - P(T) &= S_t - Ke^{-r(T-t)} \\ \Leftrightarrow P(T) &= S_t(P_1 - 1) - Ke^{-r(T-t)}(P_2 - 1) \end{aligned}$$

Deve ainda ser feita uma observação no que diz respeito ao logaritmo existente na equação (3.28). Este logaritmo terá argumentos complexos o que poderá levar a sérios problemas na implementação da solução. Desta forma, foi implementada uma solução para o problema da discontinuidade provocado pelo logaritmo com base no que foi apresentado em Kahl and Jäckel (2005)

4.1 O Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é um método estatístico bastante utilizado para o cálculo de simulações estocásticas. Este método tem grande aplicabilidade em múltiplas áreas, entre as quais podemos encontrar a Matemática Financeira.

As simulações de Monte Carlo são utilizadas essencialmente para aproximar numericamente funções de grande complexidade. Para tal, este método gera uma grande quantidade de observações a partir de uma distribuição de probabilidades e utiliza a amostra obtida para calcular a aproximação desejada. Deve-se ter sempre em conta o número de tentativas geradas, uma vez que a precisão do resultado final depende em grande parte deste número. Um caso particular da sua utilização é a aproximação numérica de integrais, considerando um integral como um valor esperado (Glasserman (2003)).

Como todos os modelos numéricos, também o método de Monte Carlo apresenta vantagens e desvantagens. Este é um algoritmo bastante utilizado e bem aceite pela comunidade científica. Pode ser facilmente implementado em qualquer linguagem de programação. Podemos, inclusivé, simulá-lo numa folha de cálculo. Esta fácil implementação leva também a que os modelos aproximados através deste método possam sofrer alterações sem grandes dificuldades. Se precisarmos de uma aproximação mais correcta, realizar um maior número de simulações deve ser suficiente para tal. Por outro lado, se necessitarmos, como é o caso, de efectuar milhares de simulações o algoritmo pode revelar-se um pouco lento na apresentação dos resultados (Wilmott (2006)).

Antes de mais, convém que seja explicado como é efectuada a aproximação numérica do valor das opções. Para qualquer um dos métodos utilizados, o algoritmo é o mesmo, diferindo apenas no passeio aleatório que origina cada um dos diferentes modelos. Assim sendo, e segundo a teoria de Black-Scholes, o valor dito justo para uma opção, na data de maturidade, é o valor esperado do seu *payoff*, ou seja, vários preços de activos serão simulados de forma a calcular vários *payoffs* de forma a que o valor esperado pretendido seja tomado como a média destas simulações. As simulações do preço do activo nada mais são que concretizações de MBG. Interessa-nos também,

para além do valor da opção na data de maturidade, qual o seu valor no instante inicial. Devemos então, e uma vez que o nosso activo é livre de riscos, proceder ao respectivo desconto do tempo total em função da taxa de juro aplicada:

$$\text{Opção}(t = 0) = e^{-rT} E[\text{Payoff}(S, K)]$$

Este resultado é obtido após ser calculada a aproximação do preço do activo que, novamente, é uma discretização do MB, e das respectivas adaptações para os vários modelos estudados nas secções anteriores. Muito geralmente, devemos calcular várias simulações de preços de activos, calcular os respectivos *payoff* das opções, seguindo-se o cálculo do valor esperado destes *payoffs* e o respectivo desconto, sendo este o resultado final da opção.

Vejamus então como discretizar o MB de forma a construirmos estes caminhos. Como já foi visto anteriormente, o MB introduz um factor de aleatoriedade à equação diferencial. Este factor aleatório será retirado de uma distribuição Normal padrão e a discretização para o caso da aproximação para o modelo de difusão contínuo é a seguinte:

$$\begin{aligned} \delta S_i &= \mu S_i dt + \sigma S_i \sqrt{dt} \epsilon \\ S_{i+1} &= S_i + \delta S_i \end{aligned}$$

Ainda em relação ao factor aleatório introduzido no modelo, de forma a diminuir a ocorrência de erros estatísticos e como a probabilidade de ocorrência de um determinado número é igual à probabilidade de ocorrência do seu simétrico, sempre que se retirou um determinado número aleatório da distribuição no passo seguinte foi utilizado o seu simétrico.

Note-se que, novamente, como estamos perante activos livres de riscos μ corresponde neste modelo à taxa de juro aplicada. Por sua vez, dt representa o intervalo de tempo correspondente ao cálculo de cada S_i , onde tomamos $i = 0 \dots n - 1$ e portanto $dt = T/n$. Esta forma de discretização é chamada de método de Euler e facilmente se aplica a qualquer equação diferencial estocástica. Embora cada caminho individual gerado tenha erros de ordem $O(\sqrt{dt})$, este método de discretização apresenta erros de ordem $O(dt)$ enquanto esperança. Por sua vez, para uma estimativa de Monte Carlo baseada em N simulações a ordem de convergência será então $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ (Glasserman (2003)).

4.1.1 Métodos Baseados em Simulações de Monte Carlo

De forma semelhante obtemos as aproximações para os modelos de Merton e de Heston. Para qualquer um destes dois métodos iremos precisar de um valor aleatório extra. Para o modelo de Merton precisamos de um valor para simular o salto e para o modelo de Heston para o cálculo do diferencial da volatilidade. Também neste método, e pelas mesmas razões que anteriormente, cada vez que retirarmos um número aleatório será utilizado no passo seguinte o seu simétrico. Como neste método necessitamos de dois números aleatórios, serão feitas as quatro combinações possíveis entre os valores retirados e os respectivos simétricos.

Comecemos então pelo modelo com saltos de Poisson. O método de aproximação é bastante semelhante ao modelo anterior, diferindo deste apenas no caso em que ocorre um salto, $dq = 1$. É este o caso que iremos considerar e o modelo discreto obtido é o seguinte:

$$\begin{aligned}\delta S_i &= \mu S_i dt + \sigma S_i \sqrt{dt} \epsilon + (J - 1) S_i dq \\ S_{i+1} &= S_i + \delta S_i\end{aligned}$$

Neste modelo, J não será uma quantidade constante mas sim uma quantidade aleatória retirada de uma distribuição Log-Normal (Wilmott (2006)). Uma vez que os recursos disponíveis na realização desta simulação não permitiam a devolução directa de um valor retirado de uma distribuição Log-Normal, retiramos antes o valor j de uma distribuição Normal(μ' , $(\sigma')^2$), à semelhança do realizado anteriormente, e aplicamos à aproximação o valor e^j . Assim, $J = e^j$ segue a distribuição Log-Normal pretendida, tendo os seguintes valores para o valor esperado e variância:

$$\begin{aligned}E[J] &= e^{\mu' + \frac{1}{2}(\sigma')^2} \\ Var[J] &= (e^{(\sigma')^2} - 1)e^{2\mu' + (\sigma')^2}\end{aligned}$$

Para o modelo de Heston o processo é semelhante. Deve, no entanto, ter-se em conta que os MB dos processos que representam o preço do activo e a variância serão dependentes. Esta dependência será determinada pelos valores aleatórios que dão origem a estes processos. Assim sendo, necessitamos considerar um terceiro MB, dB_t^3 , independente destes dois processos. Conseguimos assim estabelecer uma relação de dependência entre os dois principais processos da seguinte forma:

$$dB_t^2 = \rho dB_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t^3,$$

pelo que a discretização pretendida tomará a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta S_i &= \mu S_i dt + \sqrt{V_i} S_i \sqrt{dt} \epsilon_1 \\ S_{i+1} &= S_i + \delta S_i \\ \delta V_i &= \kappa(\theta - V_i) dt + \sigma \sqrt{V_i} (\rho \epsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_3) \sqrt{dt} \\ V_{i+1} &= V_i + \delta V_i\end{aligned}$$

É de referir que se procede de forma semelhante ao modelo com saltos, no que diz respeito aos valores aleatórios. Como para este processo também necessitamos de dois valores também serão utilizadas as quatro combinações possíveis durante o processo.

Uma vez que a variância não pode ser negativa, cada vez que tal situação ocorre o valor obtido será substituído pelo seu simétrico.

4.1.2 Regra de Simpson

Tal como vimos anteriormente e antes de apresentarmos resultados que dependem deste método vamos precisar de calcular o valor de um integral no modelo de Heston. Necessitamos, portanto, de um método numérico que nos aproxime o valor deste integral. Vamos então introduzir um método numérico para a aproximação do referido integral: a regra de Simpson, aplicada a integrais impróprios.

Na regra de Simpson é considerado um polinómio interpolador de segundo grau. sendo (a, b) os extremos do intervalo de integração, a regra de Simpson simples aproxima o integral pretendido da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(a) + 4f(\frac{b-a}{2}) + f(b)),$$

à qual está associada a fórmula de erro:

$$\text{Erro}_f = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \text{ onde } \xi \in]a, b[$$

No entanto, a regra de Simpson é normalmente utilizada em integrais próprios, o que nos conduz ao problema: como aplicar a regra de Simpson aos integrais impróprios que precisamos de aproximar? Para este efeito definimos um limite para o "extremo superior" dos integrais, e os valores desta forma desprezados são irrelevantes em termos de precisão numérica. Existe, no entanto, ainda outro problema a resolver. A função que pretendemos aproximar não se encontra definida em zero, pelo que não é possível considerar também este extremo dos integrais no modelo de aproximação dos mesmos. A solução passa, novamente, por truncar o intervalo num dado ponto próximo de zero e voltar a provar que os valores retirados podem ser desprezados.

Como solução para este problema decidiu-se considerar a divisão do intervalo principal em dois subintervalos, $]0, +\infty[=]0, 1] \cup [1, +\infty[$ e para cada um destes dois intervalos vamos considerar partições muito particulares:

$$\begin{aligned}]0, 1] &= \bigcup_{i=1}^{n+1} \left] \frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i-1} \right] \\ [1, +\infty[&= \bigcup_{i=1}^{n+1} [2i-1, 2i+1[\end{aligned}$$

Vamos considerar que queremos como limite superior o valor 100. No que se segue apenas será referido o limite, uma vez que o limite inferior irá depender do valor estipulado para o limite superior. No entanto, devido à forma como os intervalos estão construídos, iremos na realidade calcular os integrais pretendidos no intervalo $] \frac{1}{99}, 99[$. Apesar deste acerto, sempre que no seguimento sejam referidos os limites destes integrais, estes serão apresentados pelo inteiro imediatamente acima do real limite do intervalo. A figura (4.1) mostra uma representação destes intervalos.

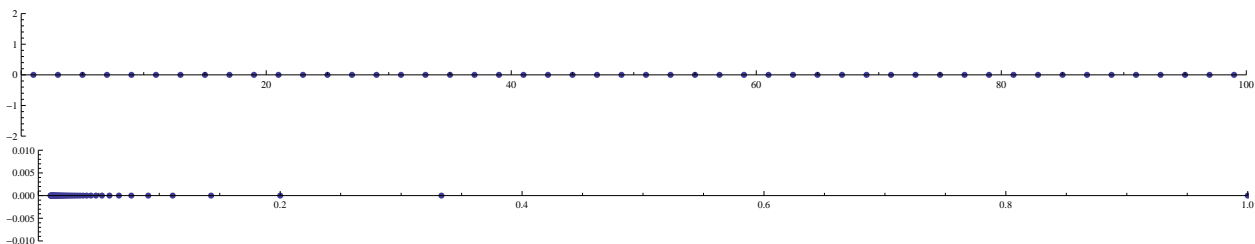


Figura 4.1: Representação dos intervalos para aplicação da Regra de Simpson

É de notar, que enquanto nos intervalos do tipo $[2i-1, 2i+1[$ os espaçamentos $h = \frac{b_i - a_i}{2} = 1$, no intervalos do tipo $] \frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i-1}]$, os espaçamentos h não serão constantes, pois irão variar em cada um dos intervalos. Teremos então, para este caso:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{b_i - a_i}{2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}}{2} \\
 &= \frac{2}{4i^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Resta-nos então provar que os valores destes integrais fora dos limites que definimos para os seus extremos tem um valor que converge para zero. Para tal, e uma vez que a função que precisamos estudar é bastante complicada, efectuou-se uma análise numérica de resultados que nos permitem concluir acerca destas convergências. Assim sendo, foram calculados os valores aproximados para P_1 e P_2 considerando quinhentas aproximações, sendo que os limites utilizados para os respectivos integrais iniciam-se em 10 e terminam em 5000. A Figura (4.2) ilustra a convergência destas duas quantidades para um valor constante, representado pela recta a verde.

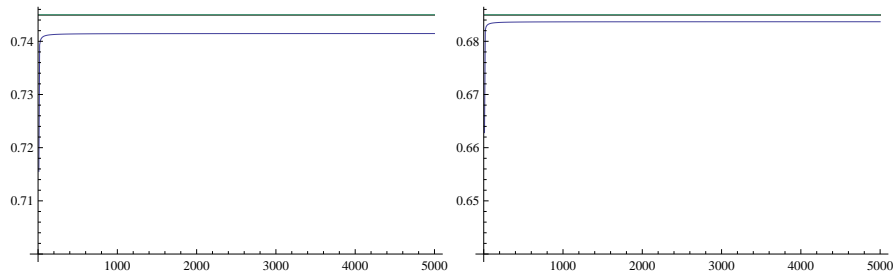


Figura 4.2: Gráficos relativos à convergência dos valores P_1 e P_2 , respectivamente

A partir destes resultados podemos considerar que estas quantidades estão a convergir para os valores representados pelas rectas verdes, e uma vez estas derivam do integral aproximado pela multiplicação e soma, respectivamente, de constantes, também os integrais propriamente ditos estarão a convergir. Tais valores serão, respectivamente para P_1 e para o P_2 , 0.745 e 0.685. Desta forma, podemos então fazer uma análise de convergência dos erros entre os valores observados em P_1 e P_2 e o limite considerado. A Figura (4.3) mostra como se comporta o erro considerado.

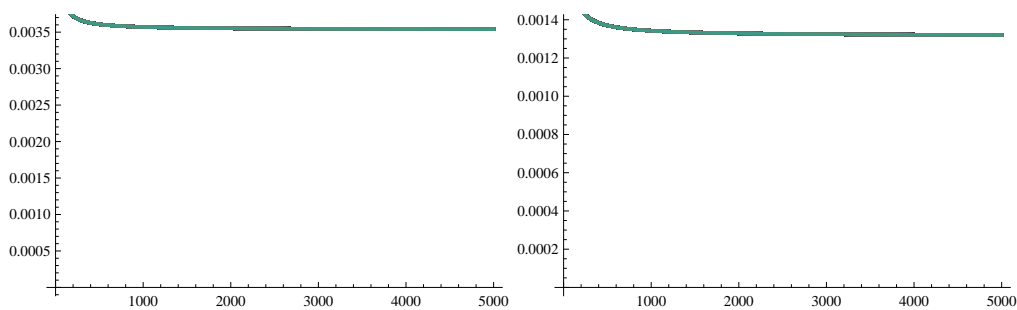


Figura 4.3: Gráficos relativos aos erros de convergência de P_1 e P_2 , respectivamente

No entanto, as imagens não são suficientes para justificar que estes valores convergem, até porque, devido à escala em que os gráficos se podem encontrar representados, podemos facilmente ser induzidos em erro. Para determinar a velocidade com que os erros, associados às aproximações dos valores de P_1 e P_2 , tendem para zero devemos efectuar uma análise de convergência destes valores. Para tal, efectuou-se uma regressão sobre os pontos a analisar, de forma a concluir qual a curva que melhor se adapta ao seu comportamento.

Antes da apresentação dos resultados da regressão pretendida, devemos fazer uma pequena explicação para o porque da escolha da curva aproximada. Pretendemos efectuar uma aproximação de uma lista de pontos (x_i, y_i) , tais que,

$$y_i = cx_i^p$$

sendo que p representa a ordem de convergência da nossa aproximação. Esta igualdade também pode ser representada como:

$$\begin{aligned} y_i &= cx_i^p \\ \log(y_i) &= \log(cx_i^p) \\ &= \log(c) + p\log(x_i) \end{aligned}$$

Se considerarmos a mudança de variável $Y_i = \log(y_i)$, $X_i = \log(x_i)$ e $C = \log(c)$ obtemos uma equação linear do tipo:

$$Y_i = C + pX_i$$

No entanto, após algumas observações concluímos que a convergência pode ser um pouco mais lenta do que o esperado. De facto, a curva que melhor se adaptou a esta situação é do tipo $y_i \approx \frac{c}{\log(x)}$, onde c , mostra que decrescer para zero à medida que o limite do integral é aumentado. Para comprovar esta afirmação apresentamos, na Tabela (4.2), os resultados obtidos para esta análise, tendo sido calculados vários valores para os integrais P_i , utilizando limites progressivamente superiores. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando os parâmetros iniciais que se encontram na Tabela (4.1).

S_0	K	r	T	V_0	κ	σ_{heston}	θ	ρ
1.46	1.37	0.05	0.75	0.04	2.0	0.1	0.04	0.5

Tabela 4.1: Valores iniciais utilizados nas aproximações dos valores de P_1 e P_2

Como podemos observar os valores de c tendem a diminuir, embora decresçam de uma forma mais lenta que o pretendido. Temos, portanto, que os valores para P_1 e P_2 convergem e desta forma podemos desprezar os seus valores para além dos limites considerados.

4.1.3 Resultados das Aproximações Numéricas

Analisemos então os resultados obtidos com cada um dos métodos. Para todas as simulações apresentadas vamos utilizar os mesmos valores de entrada. Comuns ao três métodos temos o valor inicial do preço do activo (S_0), o preço de exercício (K), a taxa de juro aplicada (r) e a data de maturidade da opção (T). A volatilidade será, também, um parâmetro comum aos três modelos. No entanto, devemos ter em atenção que o modelo de Heston utiliza a raiz da volatilidade. Assim, por forma a ser possível compararmos os resultados dos três modelos, devemos introduzir como valor inicial da variância no modelo de Heston o quadrado do valor introduzido nos restantes modelos. Sem perda de generalidade, os exemplos apresentados dizem respeito a uma *call option*. Para

Limite Superior	Limite Inferior	Melhor Aproximação para P_1	Melhor Aproximação para P_2
500	0.002	$-0.0065788 + 0.0551804/Ln(x)$	$-0.00678166 + 0.0441085/Ln(x)$
550	0.00181818	$-0.00608766 + 0.0532984/Ln(x)$	$-0.00638585 + 0.0425918/Ln(x)$
620	0.0016129	$-0.00550777 + 0.0510345/Ln(x)$	$-0.00591875 + 0.0407682/Ln(x)$
710	0.00140845	$-0.00489798 + 0.0486004/Ln(x)$	$-0.00542783 + 0.0388086/Ln(x)$
830	0.00120482	$-0.00425087 + 0.0459507/Ln(x)$	$-0.00490718 + 0.0366767/Ln(x)$
1000	0.001	$-0.00354843 + 0.042987/Ln(x)$	$-0.00434242 + 0.034294/Ln(x)$
1250	0.0008	$-0.00279533 + 0.0396936/Ln(x)$	$-0.00373744 + 0.0316483/Ln(x)$
1660	0.00060241	$-0.0019576 + 0.0358642/Ln(x)$	$-0.00306514 + 0.0285751/Ln(x)$
2500	0.0004	$-0.000944487 + 0.0309464/Ln(x)$	$-0.00225316 + 0.0246337/Ln(x)$
5000	0.0002	$0.000364541 + 0.0239713/Ln(x)$	$-0.00120601 + 0.0190541/Ln(x)$

Tabela 4.2: Melhores aproximações aos valores de P_1 e P_2 para limites do integral entre 500 e 5000

obtermos estas aproximações, recorreremos a duas abordagens distintas mas utilizadas em simultâneo: o aumento de experiências, por forma a aumentar a precisão dos valores esperados calculados, e o número de subintervalos de tempo considerados para o cálculo de cada descritização de MB. Esta forma de calcular os preços das opções pode parecer confusa à primeira vista. Daqui em diante, e para tornar a notação mais fácil, identificaremos *NSTEPS* como o número de subintervalos considerados para o cálculo de cada caminho, e como *NRUNS* o número de simulações efectuadas para a aproximação de cada valor esperado dos *payoffs* das opções. Podemos então descrever este processo num simples algoritmo, de forma a tornar a visualização deste modelo de precificação mais acessível. Este algoritmo encontra-se no Algoritmo 1.

Algorithm 1 Algoritmo descritivo do método de aproximação do preço das opções

```

NSTEPS=25;
while NSTEPS < Dias até à maturidade do
  NRUNS = 100;
  while Erro > x AND NRUNS < 105 do
    for j=0...NRUNS do
      Calcula caminho para preço do activo,  $S_t$ 
      Calcula respectivo payoff
    end for
    Calcula valor esperado das simulações anteriores e apresenta a solução para este valor de NRUNS
    NRUNS=NRUNS*2
  end while
  Apresenta a solução para este valor de NSTEPS
  NSTEPS=NSTEPS*2
end while

```

Desta forma, os valores iniciais utilizados para o cálculo das aproximações são apresentado na Tabela (4.3).

Na Tabela (4.4) podemos encontrar as aproximações de valores de opções calculados a partir do método de Monte Carlo para aproximação de modelos de difusão contínuos. Como podemos observar existem dois tipos de erro nesta tabela. O *Erro1* diz respeito ao erro entre cada iterada para um número fixo de pontos em cada caminho simulado. Por sua vez, o *Erro2* está associado à diferença entre as soluções para cada valor de *NSTEPS*. Os gráficos apresentados na Figura (4.4) ilustram como estas aproximações, ao aumentarmos o número

Valores comuns a todos os modelos				Modelos de Difusão					Modelos de Heston				
				Contínuos		com Saltos							
S_0	K	r	T	σ	σ	λ	σ'	μ'	V_0	κ	σ_{heston}	θ	ρ
1.46	1.37	0.05	0.75	0.2	0.2	0.01	0.1545	0.1	0.04	5.0	0.1	0.04	0.1

Tabela 4.3: Valores iniciais utilizados nas aproximações dos vários modelos

de simulações, se aproximam cada vez mais do resultado teórico, obtido através da equação de Black Scholes para precificação de opções. Os gráficos apresentados para os erros na Figura (4.5) dizem respeito aos erros relativos entre iteradas sucessivas, ou seja, estes gráficos representam o *Erro1*. Cada um deles diz respeito a um valor considerado para *NSTEPS*, e, de acordo com o algoritmo apresentado, corresponde a *NSTEPS*= 25, 50, 100 e 200. Como podemos verificar a partir deles, o erro, embora com algumas oscilações, tende a diminuir à medida que *NSTEPS* e *NRUNS* aumentam. Notemos ainda que como temos duas condições de paragem, o algoritmo pode apresentar uma solução antes de o erro começar a estabilizar.

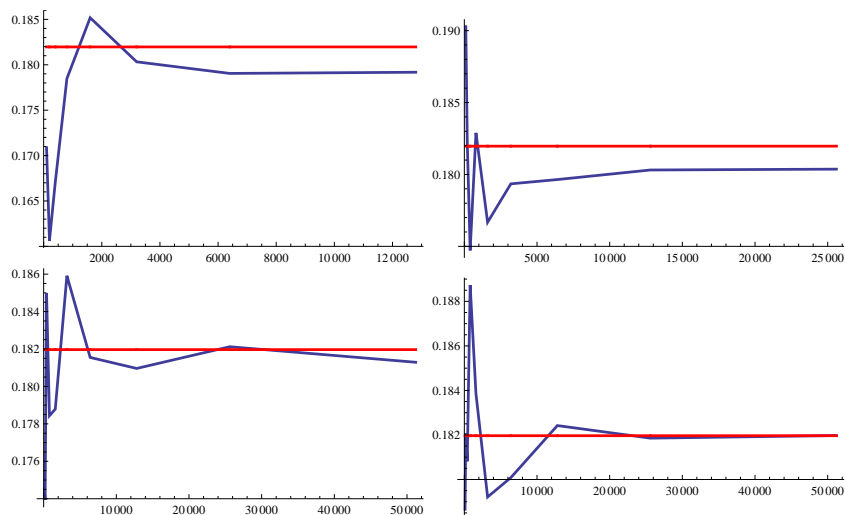


Figura 4.4: Gráficos representativos dos valores apresentados na Tabela (4.4) Respectivamente, da esquerda para a direita e de cima para baixo representam os resultados para os valores de *NSTEPS*=25, 50, 100 e 200

Para o método de aproximação com saltos os resultados obtidos são apresentados de forma semelhante e podem ser observados na Tabela (4.5) e nas Figuras (4.6) e (4.7).

Os resultados obtidos com estes dois métodos apresentam-se bastante próximos, sendo difícil dizer qual apresenta, de momento, os melhores resultados.

Por fim, apresentamos os resultados para o modelo de Heston. Tal como anteriormente, estes podem ser encontrados na Tabela (4.6) e na Figura (4.8),bem como os erros deste método na Figura (4.9).

Como podemos observar, os dois primeiros modelos devolvem soluções muito próximas entre si e que mostram alguma convergência para a solução devolvida pelos modelos teóricos. No entanto, e ao contrário do que seria esperado, o modelo de Heston apresenta uma pequena divergência da solução obtida numericamente para a solução analítica. Uma vez que estamos a aproximar duas equações diferenciais estocásticas, o modelo de Heston conta com dois parâmetros aleatórios na sua construção. Este acontecimento provoca uma convergência mais lenta, o que pode ser a causa da divergência de valores observada. Devemos ter em consideração que estes resultados são

NSTEPS	NRUNS	Valor Opção	Erro
25	100	0.170859	1
25	200	0.16063	0.0636813
25	400	0.167058	0.0384737
25	800	0.178481	0.0640027
25	1600	0.185181	0.0361806
25	3200	0.180324	0.0269348
25	6400	0.179048	0.00712415
25	12800	0.179178	0.000725909
		Solução: 0.179178	Erro2: 1
50	100	0.190277	1
50	200	0.182328	0.0435943
50	400	0.174718	0.0435589
50	800	0.182893	0.0446971
50	1600	0.176674	0.0351963
50	3200	0.179347	0.0149027
50	6400	0.179645	0.00165806
50	12800	0.18031	0.00368864
50	25600	0.180369	0.000329665
		Solução: 0.180369	Erro2: 0.00660373
100	100	0.174525	1
100	200	0.173936	0.00338468
100	400	0.184966	0.0596315
100	800	0.178436	0.0365927
100	1600	0.178787	0.00196101
100	3200	0.185914	0.0383373
100	6400	0.181549	0.0240456
100	12800	0.180961	0.00324596
100	25600	0.182121	0.00636883
100	51200	0.181291	0.0045797
		Solução: 0.181291	Erro2: 0.00508299
200	100	0.178663	1
200	200	0.182082	0.018781
200	400	0.180816	0.00700215
200	800	0.188731	0.0419354
200	1600	0.183846	0.026572
200	3200	0.179214	0.0258437
200	6400	0.180086	0.00484231
200	12800	0.182422	0.0128059
200	25600	0.181857	0.00310579
200	51200	0.181974	0.000639769
		Solução: 0.181974	Erro2: 0.00375175
Solução Teórica:0.181967			

Tabela 4.4: Valores obtidos através de simulações de Monte Carlo para aproximação de modelos de difusão contínuos

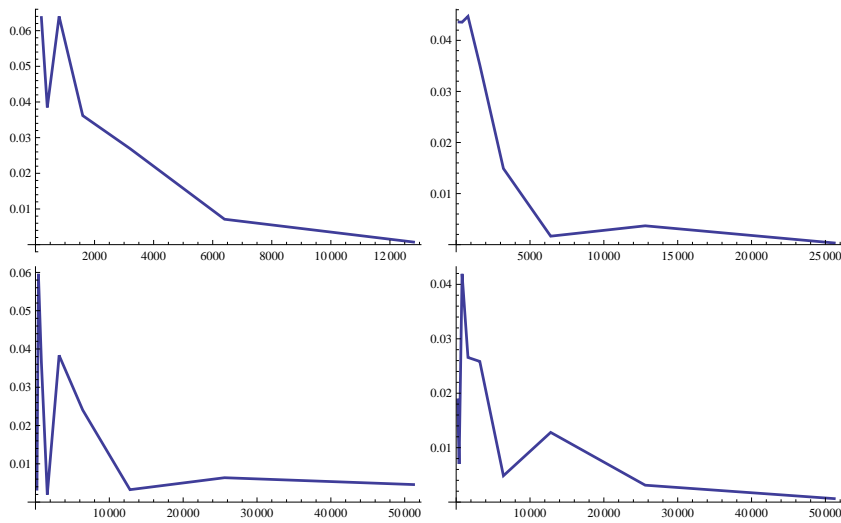


Figura 4.5: Gráficos representativos dos erros entre iteradas relativos ao valores apresentados na Tabela (4.4)



Figura 4.6: Gráficos representativos dos valores apresentados na Tabela (4.5) Respectivamente, da esquerda para a direita e de cima para baixo representam os resultados para os valores de $NSTEPS=25, 50, 100$ e 200

NSTEPS	NRUNS	Valor Opção	Erro1
25	100	0.179709	1
25	200	0.171357	0.0487403
25	400	0.179678	0.046309
25	800	0.184133	0.0241972
25	1600	0.179396	0.0264091
25	3200	0.172923	0.0374286
25	6400	0.177924	0.0281076
25	12800	0.176103	0.0103407
25	25600	0.177982	0.0105554
25	51200	0.176895	0.00614522
		Solução: 0.176895	Erro2: 1
50	100	0.188791	1
50	200	0.18035	0.0468005
50	400	0.171797	0.0497899
50	800	0.176037	0.024089
50	1600	0.184519	0.0459653
50	3200	0.176849	0.0433666
50	6400	0.179531	0.0149376
50	12800	0.179058	0.00263909
50	25600	0.179591	0.00296831
50	51200	0.179552	0.000219967
		Solução: 0.179552	Erro2: 0.0147983
100	100	0.174358	1
100	200	0.170903	0.0202154
100	400	0.188847	0.0950215
100	800	0.182436	0.0351455
100	1600	0.185284	0.0153746
100	3200	0.178846	0.0360014
100	6400	0.180994	0.0118703
100	12800	0.180525	0.00260084
100	25600	0.180242	0.00156712
100	51200	0.181686	0.00794754
		Solução: 0.181686	Erro2: 0.0117459
200	100	0.179875	1
200	200	0.168789	0.0656769
200	400	0.175145	0.036285
200	800	0.172485	0.0154219
200	1600	0.186752	0.0763994
200	3200	0.17791	0.0497007
200	6400	0.180058	0.01193
200	12800	0.180045	7.29E-05
		Solução: 0.180045	Erro2: 0.00911472
Solução Teórica: 0.180914			

Tabela 4.5: Valores obtidos através de simulações de Monte Carlo para aproximação de modelos de difusão com saltos

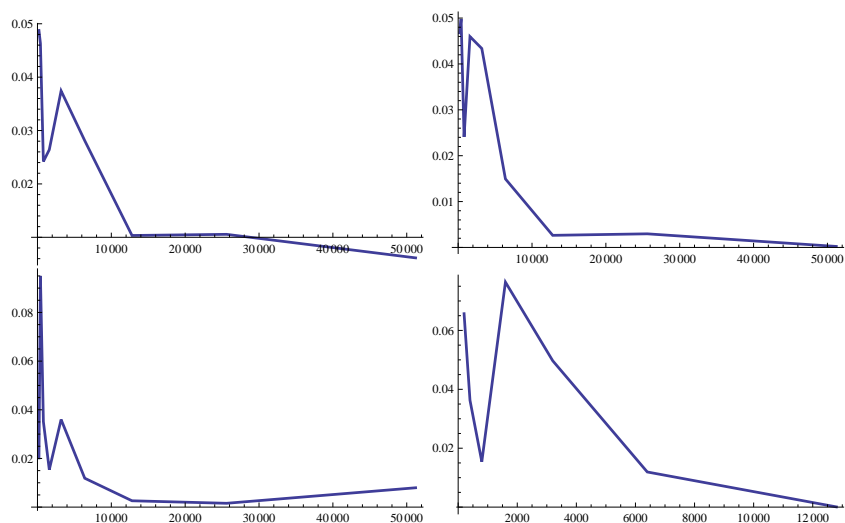


Figura 4.7: Gráficos representativos dos erros entre iteradas relativos ao valores apresentados na Tabela (4.5)

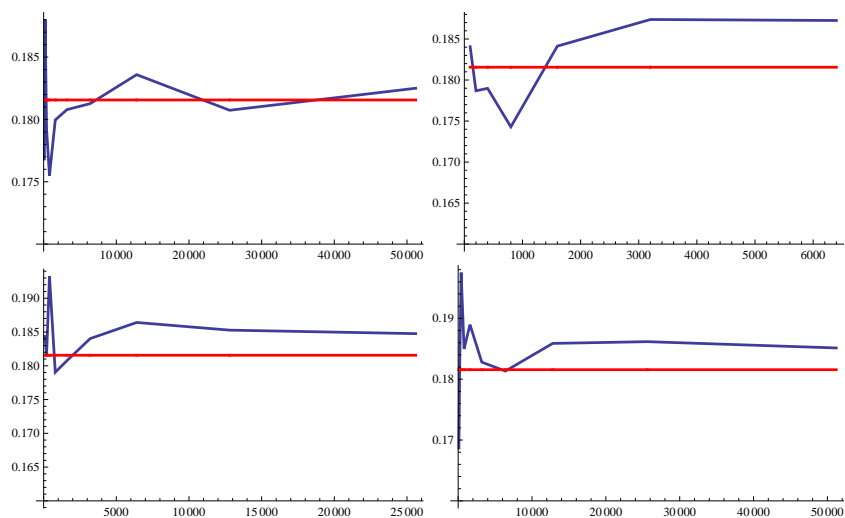


Figura 4.8: Gráficos representativos dos valores apresentados na Tabela (4.6) Respectivamente, da esquerda para a direita e de cima para baixo representam os resultados para os valores de $NSTEPS=25, 50, 100$ e 200

NSTEPS	NRUNS	Valor Opção	Erro1
25	100	0.176828	1
25	200	0.188014	0.0594986
25	400	0.179238	0.048963
25	800	0.175493	0.0213382
25	1600	0.179953	0.0247817
25	3200	0.180784	0.00459438
25	6400	0.181267	0.00266732
25	12800	0.18359	0.0126502
25	25600	0.180734	0.0157981
25	51200	0.1825	0.00967493
		Solução: 0.1825	Erro2: 1
50	100	0.18406	1
50	200	0.178687	0.0300737
50	400	0.178981	0.00164389
50	800	0.174293	0.0268989
50	1600	0.18413	0.0534244
50	3200	0.187378	0.0173361
50	6400	0.187256	0.000648801
		Solução: 0.187256	Erro2: 0.0254014
100	100	0.18435	0.0504713
100	200	0.181522	0.0155799
100	400	0.193255	0.0607118
100	800	0.179046	0.079361
100	1600	0.180753	0.00944675
100	3200	0.184023	0.0177672
100	6400	0.186411	0.0128096
100	12800	0.185276	0.00612245
100	25600	0.184758	0.00280872
		Solução: 0.184758	Erro2: 0.0135258
200	100	0.168682	1
200	200	0.181122	0.0686818
200	400	0.197522	0.0830282
200	800	0.184986	0.0677683
200	1600	0.188965	0.0210556
200	3200	0.1828	0.0337216
200	6400	0.181336	0.00807385
200	12800	0.185883	0.0244618
200	25600	0.186168	0.0015273
200	51200	0.185134	0.00558295
		Solução: 0.185134	Erro2: 0.00203453
Solução Teórica 0.18156			

Tabela 4.6: Valores obtidos através de simulações de Monte Carlo para aproximação de modelos com volatilidade estocástica

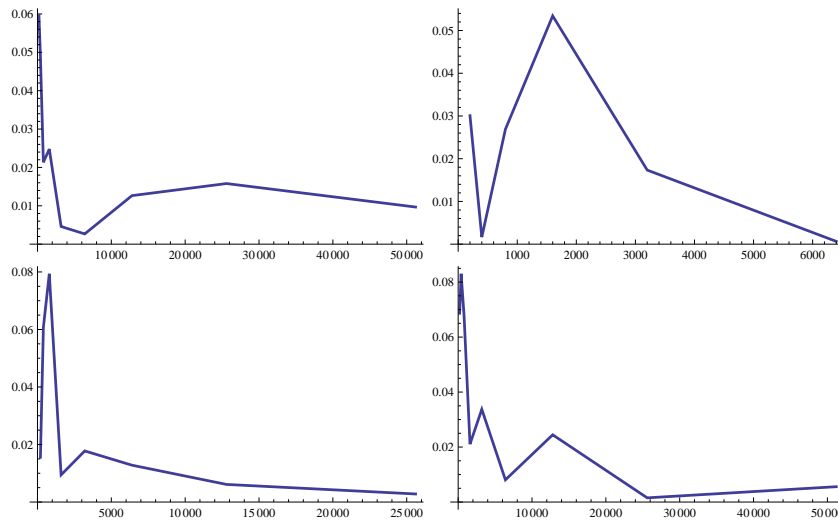


Figura 4.9: Gráficos representativos dos erros entre iteradas relativos ao valores apresentados na Tabela (4.6)

apenas exemplos do funcionamento das simulações numéricas, pelo que não podemos concluir desde já qual deles é o mais indicado para aproximar dados reais. Antes de mais conclusões, devemos proceder a uma calibração dos parâmetros dos três modelos. Este tipo de análise, que será realizada na secção 4.2, permitir-nos-á então efectuar aproximações mais correctas dos valores reais de mercado.

4.2 Calibração dos Modelos Implementados

A calibração de modelos financeiros é uma questão bastante importante, ou até mesmo indispensável, uma vez que é uma ferramenta que nos permite ajustar os parâmetros de um determinado modelo aos valores reais existentes no mercado. Se tomarmos como exemplo o modelo de Black-Scholes, a calibração deste é uma forma de encontrarmos a volatilidade que melhor se adequa ao mercado actual. Desta forma, é-nos possível simular e precificar com mais exactidão os derivados em estudo. O mesmo acontece com os restantes modelos. Embora o número de parâmetros a calibrar seja superior ao de Black-Scholes, também os resultados da calibração se irão reflectir na precisão das simulações posteriormente realizadas. Só após a calibração poderemos fazer juízos de valor acerca de qual o melhor modelo para simular preços de opções próximos dos valores reais.

Para realizar a calibração dos modelos teóricos foi utilizado um modelo heurístico para problemas de optimização que consiste essencialmente numa procura probabilística, originalmente utilizada em processos termodinâmicos: o *Simulated Annealing*, ou, Arrefecimento Simulado.

O Simulated Annealing é um algoritmo de pesquisa local cuja principal função passa pela localização da melhor solução entre um número finito de soluções vizinhas. Esta localização consiste na procura de um mínimo local cujo valor seja bastante próximo do valor do óptimo global. No entanto, não nos é possível determinar se a solução que se encontrou corresponde a um mínimo local ou global. Não é necessário um grande esforço computacional para este algoritmo obter boas soluções, ou seja, soluções bastante próximas do mínimo global desejado.

Inicialmente, este algoritmo foi utilizado em estudos de termodinâmica de forma a simular um processo com duas fases distintas. A primeira fase consistia no aquecimento de um sólido até ao seu ponto de fusão e na

segunda procedia-se a um arrefecimento progressivo e gradual, até que fosse novamente atingido o ponto de solidificação do dito sólido. Nesta segunda fase, como o arrefecimento será gradual e executado da forma mais lenta possível, os átomos que constituem o sólido em estudo conseguem organizar-se numa estrutura uniforme que utiliza um mínimo de energia para tal. Este facto implica que os átomos constituintes do material em questão ganham energia para se movimentarem livremente. O arrefecimento lento e controlado permite que os átomos se organizem com uma configuração que necessita de menos energia interna, o que leva a que o material apresente menos defeitos no final do processo (Press, Teukolsky, Vetterling and Flannery (2007)).

Adaptando para o problema em estudo, o *Simulated Annealing* substitui a solução actual por uma solução próxima desta que será escolhida aleatoriamente, e que se encontre no seu espaço de soluções. Esta nova solução será escolhida através de uma função objectivo e de um variável T (definida como temperatura, em analogia ao realizado inicialmente em Termodinâmica. Esta componente aleatória irá diminuir à medida que o programa avança, pois o valor de T também irá diminuir, o que permite que o algoritmo comece a convergir para a solução óptima, que será, necessariamente, um óptimo local.

Como todos os algoritmos, também o *Simulated Annealing* apresenta prós e contras. A seu favor tem a simplicidade com que é implementado e o grande rol de possíveis aplicações, uma vez que a função custo, que no processo termodinâmico foi definido como sendo a energia do sistema, pode ser o que for preciso para cada problema em particular. Além disso, este algoritmo permite que sejam testadas soluções muito distintas da solução actual e desta forma dar uma maior independência às condições iniciais de pesquisa. Uma desvantagem deste algoritmo é a possível demora no retorno de resultados, como consequência do grau de complexidade do problema que se pretende resolver.

Expliquemos, então, como funciona este algoritmo face ao problema em estudo. Necessitamos, portanto, de uma solução inicial. Para tal, e independentemente do modelo que pretendemos calibrar, simulamos aleatoriamente vinte conjuntos constituídos pelos parâmetros que pretendemos calibrar. De seguida, escolhe-se para gerar a solução inicial aquele conjunto que gera valores de opções mais próximos dos valores de mercado que pretendemos aproximar. Medimos esta aproximação através dos desvios quadráticos dos erros relativos pontuais, ou seja, vamos querer que:

$$\sum_{i=1}^N \frac{(\text{ValorMercado}_i - \text{ValorOp}_i)^2}{\text{ValorMercado}_i^2} \approx 0$$

Além disso, o resultado obtido será dividido pelo número de ocorrências, N , de forma que o resultado final será o desvio médio de cada componente.

Para além de efectuar a aproximação para a determinação da iterada inicial, será também esta função que pretendemos minimizar durante todo o corpo do algoritmo, de forma a calibrar os parâmetros dos modelos em estudo. Vejamos então como evolui este algoritmo de forma a melhor aproximar os valores pretendidos. Primeiro temos que efectuar uma pequena alteração a um dos parâmetros do modelo. Desta forma, escolhemos o parâmetro a alterar de forma aleatória e o seu valor irá variar entre 80% e 120% do valor original. Este intervalo irá ser diminuído ao longo da evolução do algoritmo de forma a permitir que quando este já se encontra próximo da solução convirja para a mesma. Calculamos então os valores das opções com os novos parâmetros e verificamos se conduzem a uma melhor aproximação dos valores de mercado. Os valores das opções serão calculados utilizando as fórmulas (3.8), (3.13) e (3.27), nos casos em que pretendemos calibrar o modelo de Black-Scholes, ou o modelo de Merton ou o modelo de Heston, respectivamente. Se, de facto, esta nova aproximação se revelar melhor que a anterior aceitamos as alterações feitas nos parâmetros. No caso em que, pelo contrário, a aproximação é pior que a anterior surge então a diferença introduzida por este algoritmo, os

parâmetros não são rejeitados à partida. Quando temos a solução da iterada actual superior à solução da iterada anterior, ou seja, $\Delta Obj = Sol_{Actual} - Sol_{Anterior} > 0$, significa, utilizando terminologia termodinâmica, que a energia do sistema está a aumentar. Este acontecimento torna a aceitação desta nova solução mais provável se a temperatura do sistema for alta e muito pouco provável se esta temperatura for baixa. Estas probabilidades podem ser reproduzidas utilizando uma função conhecida como factor de Boltzman:

$$e^{-\frac{|\Delta Obj|}{T}}$$

Assim, gerando um valor $p \in [0, 1]$, de forma aleatória, iremos de facto rejeitar a nova solução no caso de o factor de Boltzman ser inferior ao valor aleatório calculado.

O valor para T começa por ser um valor elevado. Após uma determinada quantidade de iterações a temperatura será diminuída. Esta diminuição será gradual ao longo do decorrer do algoritmo. Assim sendo, a probabilidade de evitar ficar preso em mínimos locais é determinado pelas primeiras iterações, pois à medida que o programa avança a temperatura do sistema diminui e as alterações feitas revelam-se cada vez menos significativas.

De forma a tornar mais claro o processo descrito anteriormente, este será apresentado no Algoritmo 3. O Algoritmo 2 representa o processo de cálculo da iterada inicial.

Algorithm 2 SetIteradaInicial()

```

for i=1..20 do
  Gera aleatoriamente gama de parâmetros;
   $E_i = \sum_{k=1}^N \frac{(ValorM_k - ValorOp_k)^2}{ValorM_k^2}$ ;
end for
Retorna  $\min(E_i)$ , para  $i = 1 \dots 20$ ;
```

Uma vez apresentado o algoritmo utilizado na calibração, analisemos os resultados obtidos a partir dela. Posteriormente, voltaremos a realizar as aproximações numéricas dos modelos, utilizando então os parâmetros calibrados, e observaremos as alterações sofridas.

A primeira gama de dados foi retirada de Kahalé (2005). Os valores de opção correspondem ao dia 23 de Agosto de 1995. A taxa de juro utilizada foi 5% e o valor inicial do activo, S_0 , corresponde a 1.46. Para o modelo de Heston foi utilizado como valor inicial da volatilidade 0.2, ou seja, a variância inicial, V_0 terá um valor igual a 0.04.

As Tabelas (4.7),(4.8) e (4.9) apresentam os parâmetros iniciais com que foi iniciada a calibração, bem como os parâmetros que levaram à descoberta do mínimo. Será com estes últimos que voltaremos a calcular as aproximações numéricas do modelo. O campo Função Objectivo é representativo do valor obtido pela soma dos desvios quadráticos dos erros relativos pontuais para os parâmetros apresentados. Idealmente, pretende-se que o valor deste campo seja zero. Desta forma, procuramos qual o modelo que melhor se adapta a estes valores de mercado. Por sua vez, a Tabela (4.10) apresenta os valores das opções obtidas através dos modelos teóricos utilizando os parâmetros calibrados, bem como os valores de mercado que serviram de referência à calibração.

Algorithm 3 Algoritmo descritivo do processo de Calibração

```

SoluçãoAnterior = SetIteradaInicial();
F=0.99;
i=1;
while i<5000 OR SoluçãoAnterior > 10-7 do
  Escolhe aleatoriamente qual o parâmetro que será alterado e procede à respectiva alteração;
  Calcula nova gama de opções com os novos parâmetros;
  SoluçãoActual =  $\sum_{k=1}^N \frac{(\text{Valor}M_k - \text{Valor}Op_k)^2}{\text{Valor}M_k^2}$ ;
  Gera aleatoriamente  $p \in [0, 1]$ ;
  if SoluçãoActual > SoluçãoAnterior AND  $p > e^{-\frac{|\text{Solução}_{Actual} - \text{Solução}_{Anterior}|}{T}}$  then
    Rejeitamos SoluçãoActual;
  else
    SoluçãoAnterior = SoluçãoActual;
    if SoluçãoAnterior < min then
      min = SoluçãoAnterior;
    end if
    if MOD(10,i) == 0 then
      if Aceitações/Rejeições > 0.5 then {Se existirem muitas aceitações convém diminuir T para estabilizar
        a solução, utilizando um factor F<1}
        T = T * F;
        Diminui Intervalo de variação dos parâmetros;
      else
        T = T *  $\frac{1}{F}$ ;
      end if
      Rejeições = 1;
      Aceitações = 0;
    end if
  end if
end while

```

	Black Scholes	
	σ	Função Objectivo
Parâmetros Iniciais	0.140517	n.d.
Parâmetros Calibrados	0.140571	0.006271081

Tabela 4.7: Parâmetros Iniciais e Finais das Opções Calibradas com modelo de Black-Scholes.

	Merton				Função Objectivo
	σ	σ'	λ	μ'	
Parâmetros Iniciais	0.033236	0.033236	0.107593	0.482944	n.d.
Parâmetros Calibrados	0.140387	2.52E-06	0.0388221	0.175228	0.00446006

Tabela 4.8: Parâmetros Iniciais e Finais das Opções Calibradas com modelo de Merton

	Heston				Função Objectivo
	κ	θ	σ	ρ	
Parâmetros Iniciais	7.96175	0.044389	0.711061	-0.575775	n.d.
Parâmetros Calibrados	55.5383	0.017747	1.8431	-0.0154612	0.001323892

Tabela 4.9: Parâmetros Iniciais e Finais das Opções Calibradas com modelo de Heston

As Figuras (4.10),(4.11) e (4.12) representam as superfícies geradas pelos dados de mercado utilizados como referência e as superfícies geradas pelos valores de opções obtidos com cada um dos três modelos após a calibração. Desta forma, a superfície vermelha representa os dados de mercado e a azul os valores das opções obtidas, através dos modelos teóricos e cujos valores podem ser encontrados em (4.10).

Como podemos ver, embora inicialmente os resultados obtidos a partir do modelo de Heston se mostrassem um pouco discrepantes, em relação aos resultados esperados, estes são os que melhores resultados apresentam a nível da calibração, pois é o modelo que atinge um menor valor para a Função Objectivo. Ou seja, o modelo de Heston é aquele que melhor prevê os movimentos do mercado representado, sendo assim o modelo mais credível, para esta gama de dados, dos três modelos em questão. É importante não esquecer que estamos a falar de modelos teóricos.

Relativamente às aproximações numéricas, calculadas com os parâmetros calibrados, existem também alterações face aos primeiros resultados. Tomemos como valores teóricos de referência os obtidos, e apresentados na Tabela (4.10). Os restantes parâmetros iniciais serão, portanto, os obtidos pela calibração anterior e também já apresentados. O valor inicial do activo e a taxa de juro utilizada são os mesmos que foram utilizados no processo de calibração.

Preço de Exercício(K)	Data de Maturidade(T)	Preços após Calibração com:			Preços de Mercado
		Black-Scholes	Merton	Heston	
1.5421	0.0833	0.00309974	0.00339092	0.00398346	0.0038
1.5310	0.0833	0.0044248	0.00462549	0.00531728	0.0052
1.4872	0.0833	0.0147517	0.0142412	0.0152638	0.0147
1.4479	0.0833	0.0336451	0.0319766	0.0341897	0.0339
1.4371	0.0833	0.0406112	0.0385543	0.0412961	0.0411
1.5621	0.1667	0.00675516	0.00708258	0.00686913	0.0074
1.5469	0.1667	0.00923909	0.0093964	0.00917856	0.0100
1.4866	0.1667	0.0269378	0.0258653	0.0262277	0.0263
1.4312	0.1667	0.0572134	0.0543043	0.0568528	0.0571
1.4178	0.1667	0.0666096	0.0631929	0.0664459	0.0669
1.5764	0.2500	0.0103769	0.0106552	0.00987261	0.0105
1.5580	0.2500	0.013897	0.0139368	0.0131497	0.0140
1.4856	0.2500	0.037556	0.035975	0.0361603	0.0359
1.4197	0.2500	0.0755607	0.0717386	0.0747312	0.0745
1.4038	0.2500	0.0870621	0.0826459	0.0864753	0.0861
1.6025	0.5000	0.0219734	0.021875	0.020065	0.0188
1.5779	0.5000	0.028107	0.0276133	0.0259197	0.0246
1.4823	0.5000	0.0650188	0.0622106	0.0624698	0.0611
1.3902	0.5000	0.122634	0.116902	0.121117	0.1216
1.3682	0.5000	0.139381	0.132951	0.138188	0.1385
1.6297	0.7500	0.0312972	0.0309172	0.0284608	0.0280
1.5988	0.7500	0.0396883	0.0388126	0.0365702	0.0357
1.4793	0.7500	0.0889793	0.0853793	0.0857301	0.0838
1.3710	0.7500	0.158889	0.152414	0.156946	0.1560
1.3455	0.7500	0.178526	0.171441	0.176944	0.1761

Tabela 4.10: Valores de Opções obtidos através dos modelos teóricos após Calibração e comparação com valores de mercado retirados de Kahalé (2005)

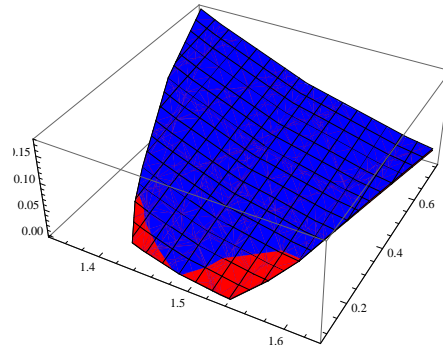


Figura 4.10: Superfícies dos valores de opção de mercado retirados de Kahalé (2005) e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Black-Scholes

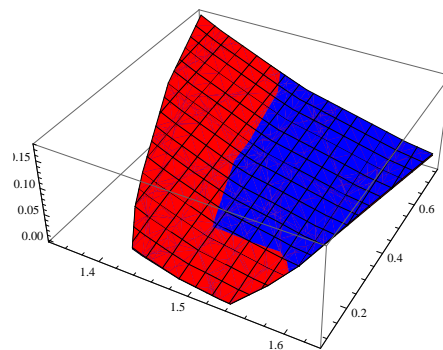


Figura 4.11: Superfícies dos valores de opção de mercado retirados de Kahalé (2005) e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Merton

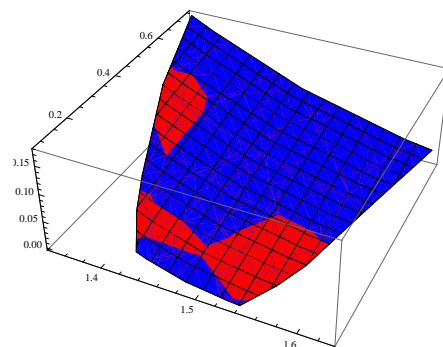


Figura 4.12: Superfícies dos valores de opção de mercado retirados de Kahalé (2005) e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Heston

Como podemos observar, na Tabela (4.11), para uma data de maturidade baixa os modelos de aproximação numérica não são tão precisos como se desejaria, mesmo após a calibração dos parâmetros. Podemos, no entanto, interpretar esta falha como uma necessidade de um maior número de simulações para a obtenção de um resultado mais correcto. Desta forma, os valores obtidos para datas de maturidade mais longas mostram-se mais precisos.

Podemos observar ainda que o modelo de Heston apresentou melhorias significativas ao longo do aumento da data de maturidade, salvo em situações onde o preço de exercício da opção é superior ao preço inicial do activo.

K	T	Modelo de Difusão contínuo	Modelo de Difusão com Saltos	Modelo Heston
1.5421	0.0833	0.00278574	0.00301712	0.00457682
1.531	0.0833	0.0041256	0.00426521	0.00602062
1.4872	0.0833	0.0141348	0.014213	0.0152592
1.4479	0.0833	0.0330502	0.0331263	0.0355004
1.4371	0.0833	0.0397976	0.0397171	0.0423605
1.5621	0.1667	0.00638011	0.00682598	0.00851418
1.5469	0.1667	0.00889462	0.00900265	0.0113433
1.4866	0.1667	0.0265293	0.0267063	0.029149
1.4312	0.1667	0.0583143	0.056658	0.0579929
1.4178	0.1667	0.0660699	0.0655563	0.0672106
1.5764	0.25	0.00992323	0.01033	0.00967732
1.558	0.25	0.0134766	0.0140376	0.0138971
1.4856	0.25	0.0373562	0.0368766	0.0407192
1.4197	0.25	0.0747212	0.0738062	0.0769432
1.4038	0.25	0.0860528	0.0854011	0.0885787
1.6025	0.5	0.0215411	0.0211299	0.0258361
1.5779	0.5	0.027596	0.0281864	0.0326086
1.4823	0.5	0.064193	0.06292	0.0691169
1.3902	0.5	0.121869	0.120147	0.122264
1.3682	0.5	0.13889	0.13687	0.139751
1.6297	0.75	0.0311474	0.0303138	0.0347916
1.5988	0.75	0.0390909	0.0381394	0.0420735
1.4793	0.75	0.0886484	0.0861356	0.0890012
1.371	0.75	0.158806	0.15519	0.155839
1.3455	0.75	0.177696	0.169682	0.174324

Tabela 4.11: Resultados das aproximações numéricas após Calibração, onde os dados de mercado correspondem aos retirados de Kahalé (2005). $S_0 = 1.46$, $r=5\%$

K	T	Modelo de Difusão contínuo	Modelo de Difusão com Saltos	Modelo Heston
1.5421	0.0833	0.266910526	0.206021053	0.204426316
1.531	0.0833	0.206615385	0.179767308	0.157811538
1.4872	0.0833	0.03844898	0.033129252	0.038040816
1.4479	0.0833	0.025067847	0.022823009	0.04720944
1.4371	0.0833	0.031688564	0.033647202	0.0306691
1.5621	0.1667	0.137822973	0.07757027	0.150564865
1.5469	0.1667	0.110538	0.099735	0.13433
1.4866	0.1667	0.008718631	0.015448669	0.108326996
1.4312	0.1667	0.0212662	0.007740806	0.015637478
1.4178	0.1667	0.012408072	0.020085202	0.00464275
1.5764	0.25	0.054930476	0.016190476	0.078350476
1.558	0.25	0.037385714	0.002685714	0.00735
1.4856	0.25	0.040562674	0.027203343	0.134239554
1.4197	0.25	0.002969128	0.009312752	0.032794631
1.4038	0.25	0.0005482	0.008117305	0.028788618
1.6025	0.5	0.145803191	0.123930851	0.374260638
1.5779	0.5	0.121788618	0.145788618	0.325552846
1.4823	0.5	0.050621931	0.029787234	0.131209493
1.3902	0.5	0.002212171	0.011949013	0.005460526
1.3682	0.5	0.002815884	0.011768953	0.009032491
1.6297	0.75	0.112407143	0.082635714	0.242557143
1.5988	0.75	0.094983193	0.068330532	0.178529412
1.4793	0.75	0.057856802	0.027871122	0.062066826
1.371	0.75	0.017987179	0.005192308	0.001032051
1.3455	0.75	0.009063032	0.036445202	0.010085179

Tabela 4.12: Erros relativos das aproximações numéricas após Calibração em contraste com os preços observados no mercado, retirados de Kahalé (2005)

Perante este tipo de situação dizemos que estamos perante uma opção *fora do dinheiro*, ou *out-of-the-money*¹. É também de notar que nestes casos, o modelo de difusão com saltos apresenta melhores aproximações numéricas que qualquer um dos outros modelos, salvo situações em que as datas de maturidade são muito baixas. Estas conclusões são sustentadas pela Tabela (4.12), onde podemos encontrar os erros relativos entre o valor real da opção e o valor calculado através das aproximações numéricas e pelas Figuras (4.13),(4.14) e (4.15) que nos mostram a relação entre o preço de exercício e o preço da opção, para uma data de maturidade constante. Nestas Figuras os valores de mercado encontram-se representados a vermelho, as aproximações numéricas a verde e, por fim, as soluções analíticas a azul. Cada um dos gráficos de cada figura representa a relação para uma determinada maturidade.

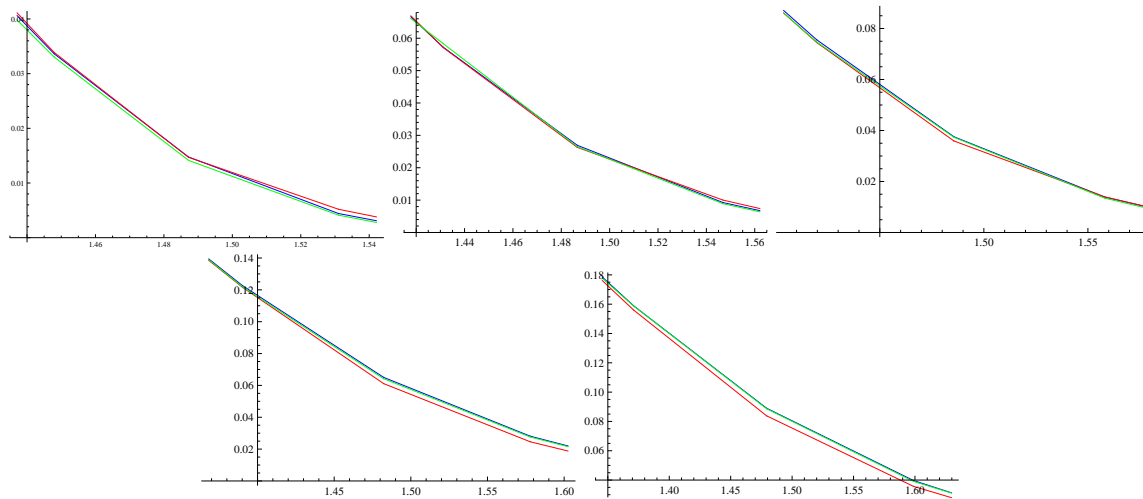


Figura 4.13: Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos de difusão contínuos. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.5$, $T=0.75$

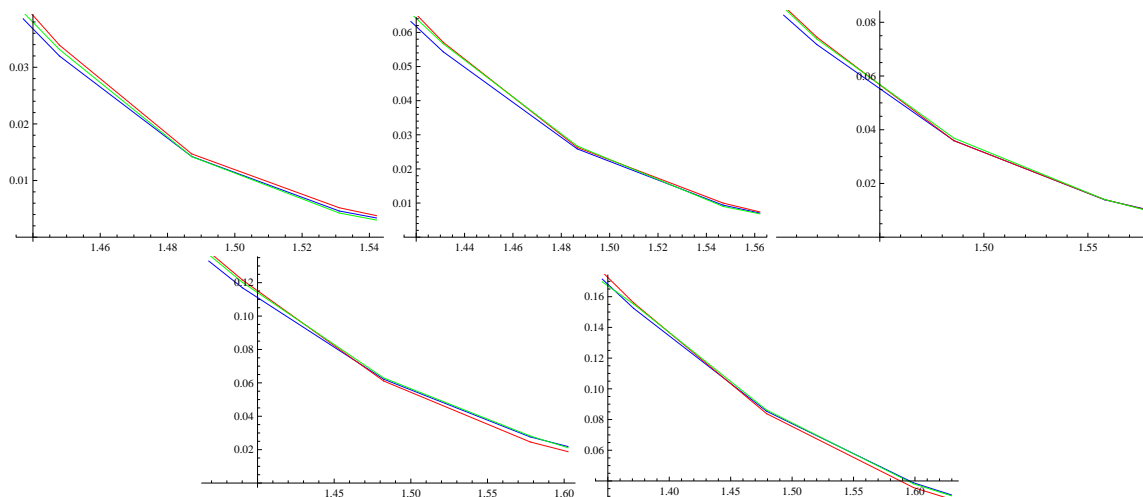


Figura 4.14: Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos de difusão com saltos. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.5$, $T=0.75$

¹No caso em que o preço de exercício de uma opção é inferior ao preço inicial do activo dizemos que estamos perante uma opção *dentro do dinheiro*, ou *in-the-money*. No caso em que os dois preços em questão são iguais, dizemos que estamos perante uma opção *no dinheiro*, ou *at-the-money*

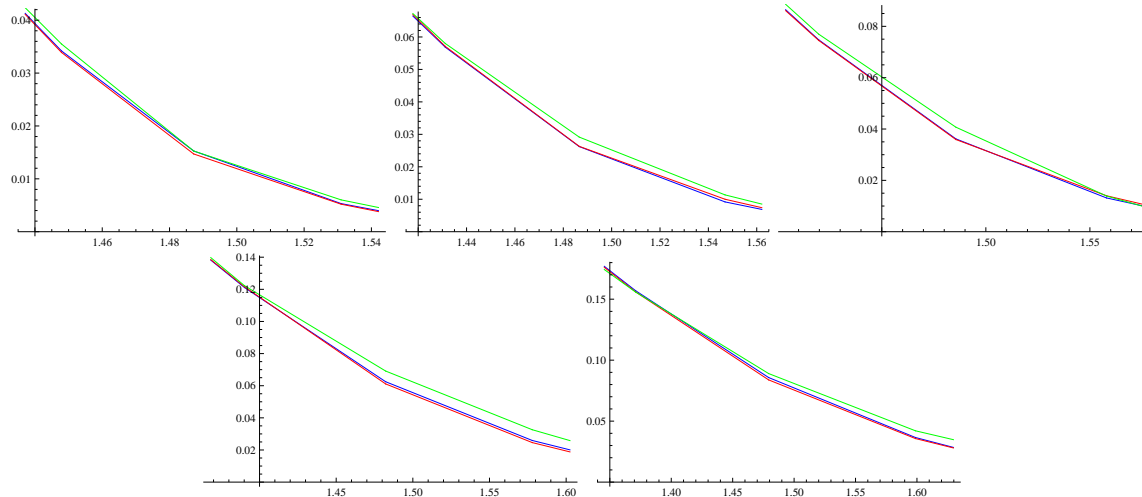


Figura 4.15: Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos com volatilidade estocástica. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.5$, $T=0.75$

Os resultados anteriores permitem-nos tirar já algumas conclusões sobre os métodos utilizados, mostrando-nos algumas situações em que estes podem não ser tão precisos quanto se desejaria. No entanto, testar para apenas uma gama de valores de mercado não é de todo suficiente. Assim sendo, vejamos o que acontece se utilizarmos uma nova gama de dados retirados do mercado. Os novos dados dizem respeito ao índice *S&P 500* do dia 30 de Agosto de 2004.

Como estes dados possuem preços de exercício e datas de maturidade distintas dos anteriores também os parâmetros iniciais de cálculo necessitaram de ajustes. Desta forma, o preço inicial do activo, S_0 , toma um valor 1099.15, que representa o preço inerente ao activo na data de recolha dos dados, a taxa de juro utilizada é 0.015. Em relação à volatilidade utilizada, não podemos deixar de ter em consideração que nos modelos de Black-Scholes e de Merton a volatilidade é um dos parâmetros que é calibrado, o que não acontece no caso do modelo de Heston. Assim sendo, tomamos 0.01 como valor inicial da variância, ou seja, a volatilidade inicial considerada terá um valor igual a 0.1.

Desta forma, as tabelas (4.13),(4.14) e (4.15) representam os resultados obtidos após a calibração da nova gama de valores de mercado. Podemos observar que os resultados obtidos utilizando esta nova gama de valores não são tão precisos como anteriormente, ou seja, as respectivas funções objectivo para os diferentes modelos não atingem resultados tão baixos como no exemplo anterior. No entanto, continua a ser o modelo de Heston a apresentar o valor mais baixo.

Devemos salientar também que os parâmetros obtidos na calibração do modelo de Merton levam a que a probabilidade de ocorrência de saltos sejam muito baixa. Desta forma, é natural que este modelo apresente resultados semelhantes ao modelo de Black-Scholes.

A Tabela (4.16) representa o mesmo que a Tabela (4.10) mas para a nova gama de dados de mercado utilizados.

As Figuras (4.16), (4.17) e (4.18) representam uma sobreposição dos dados reais com os valores das opções calculadas utilizando os modelos teóricos correspondentes. Também neste exemplo a superfície a vermelho representa os dados reais e a superfície a azul os valores das opções, obtidas através dos modelos teóricos em estudo.

	Black Scholes	
	σ	Função Objectivo
Parâmetros Iniciais	0.127177	n.d.
Parâmetros Calibrados	0.113241	0.04050993

Tabela 4.13: Parâmetros Iniciais e Finais das Opções após a calibração da gama de dados referente ao índice S&P 500, de dia 30 de Agosto de 2004, com modelo de Black-Scholes

	Merton				Função Objectivo
	σ	σ'	λ	μ'	
Parâmetros Iniciais	0.0281856	0.0281856	0.283744	0.215079	n.d.
Parâmetros Calibrados	0.113132	1.21E-02	0.00570454	0.00922545	0.040478905

Tabela 4.14: Parâmetros Iniciais e Finais das Opções após a calibração da gama de dados referente ao índice S&P 500, de dia 30 de Agosto de 2004, com modelo de Merton

	Heston				Função Objectivo
	κ	θ	σ	ρ	
Parâmetros Iniciais	0.644638	0.397777	0.721608	-0.792644	n.d.
Parâmetros Calibrados	0.080335	0.364853	0.0194589	-0.00973094	0.029358072

Tabela 4.15: Parâmetros Iniciais e Finais das Opções após a calibração da gama de dados referente ao índice S&P 500, de dia 30 de Agosto de 2004, com modelo de Heston

A Tabela (4.17), à semelhança do que foi feito anteriormente, representa os resultados numéricos obtidos após a calibração dos parâmetros. Os respectivos erros relativos, em relação aos valores reais, podem ser encontrados em (4.18). Temos ainda, e também à semelhança do que foi feito para o exemplo anterior, as Figuras (4.19), (4.20) e (4.21) que nos mostram a relação entre o preço de exercício e o valor de uma dada opção, para uma data de maturidade constante. Novamente, os valores que as opções possuem no mercado estão representados a vermelho, os valores obtidos através das simulações numéricas encontram-se a verde e os valores devolvidos pelas soluções analíticas encontram-se representados a azul.

Preço de Exercício(K)	Data de Maturidade(T)	Preços após Calibração com:			Preços de Mercado
		Black-Scholes	Merton	Heston	
1030	0.0833333	70.711	70.3327	70.5591	71.3
1100	0.0833333	14.5909	14.4986	13.6056	13
1185	0.0833333	0.152091	0.150237	0.0453926	0.15
1005	0.166667	97.082	96.6062	97.001	98.4
1075	0.166667	36.2366	36.0407	35.9095	38.7
1130	0.166667	9.48752	9.4233	9.15076	8.9
1200	0.166667	0.676072	0.669087	0.572775	0.45
1075	0.25	41.1253	40.9187	41.713	47.2
1150	0.25	8.58704	8.52917	9.09674	8.8
1200	0.25	1.97131	1.95408	2.17498	1.9
1040	0.333333	71.0514	70.7478	72.3476	78.8
1070	0.333333	48.7433	48.521	50.5082	56.7
1135	0.333333	16.4205	16.3269	18.2913	20.6
1205	0.333333	3.20432	3.17911	4.08717	3.7
1075	0.583333	56.4579	56.2701	63.1499	69
1150	0.583333	21.5824	21.4873	28.3532	29.7
1250	0.583333	3.81546	3.7895	7.15861	5.3
1050	0.833333	81.9254	81.7795	93.4428	99.1
1100	0.833333	51.7415	51.6259	65.0069	67.9
1175	0.833333	22.2029	22.1303	34.5776	32.8
1225	0.833333	11.3661	11.3184	21.4265	17.7
1025	1.33333	114.488	114.616	126.053	137.5
1075	1.33333	81.7255	81.7888	98.1202	105.4
1125	1.33333	55.621	55.6392	74.9089	77.4
1200	1.33333	28.542	28.5263	48.2489	44.5
1005	1.83333	141.747	142.313	161.412	170.1
1050	1.83333	110.85	111.265	136.255	141
1100	1.83333	81.7791	82.0553	111.821	111.5
1200	1.83333	40.3783	40.4768	82.857	63.6

Tabela 4.16: Valores de Opções após Calibração e comparação com os valores de mercado referente ao índice S& P 500 do dia 30 de Agosto de 2004

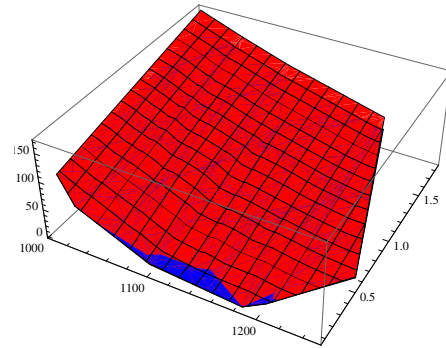


Figura 4.16: Superfícies dos valores de opção de mercado referentes ao índice S&P 500, do dia 30 de Agosto de 2004, e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Black-Scholes.

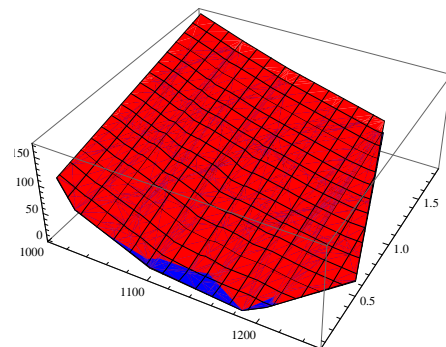


Figura 4.17: Superfícies dos valores de opção de mercado referentes ao índice S&P 500, do dia 30 de Agosto de 2004, e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Merton.

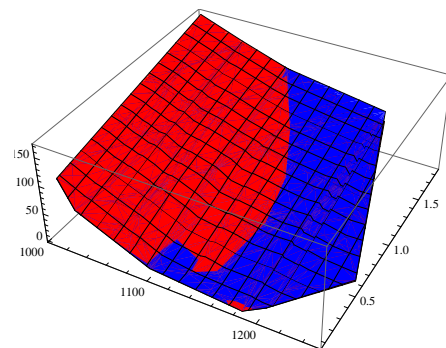


Figura 4.18: Superfícies dos valores de opção de mercado referentes ao índice S&P 500, do dia 30 de Agosto de 2004, e valores de opção obtidos, após calibração, através do modelo de Heston.

K	T	Modelo de Difusão contínuo	Modelo de Difusão com Saltos	Modelo Heston
1030	0.0833333	70.5186	70.4221	70.4695
1100	0.0833333	14.3557	14.2973	13.448
1185	0.0833333	0.142782	0.151755	0.0785717
1005	0.166667	96.723	96.8368	97.0309
1075	0.166667	36.2011	36.0099	35.8054
1130	0.166667	9.34825	9.28594	8.92194
1200	0.166667	0.647805	0.640613	0.569906
1075	0.25	41.3215	40.7645	41.486
1150	0.25	8.35735	8.3511	8.85613
1200	0.25	1.87917	1.93801	2.14332
1040	0.333333	70.8893	70.6434	72.2035
1070	0.333333	48.6362	48.6459	50.7801
1135	0.333333	16.2524	16.3908	18.2332
1205	0.333333	3.04768	3.11985	3.98367
1075	0.583333	56.4157	56.2947	62.5266
1150	0.583333	21.3846	21.5247	28.1318
1250	0.583333	3.69616	3.6875	7.37098
1050	0.833333	81.6905	81.6911	93.4133
1100	0.833333	51.2837	51.8301	65.7468
1175	0.833333	21.9974	21.9782	34.3472
1225	0.833333	11.4602	11.4001	20.8187
1025	1.33333	114.119	114.339	126.212
1075	1.33333	81.2655	80.8217	97.7137
1125	1.33333	55.5076	55.2749	75.2093
1200	1.33333	28.729	28.1087	47.3552
1005	1.83333	140.767	141.13	162.773
1050	1.83333	110.522	110.959	136.553
1100	1.83333	82.2225	81.7794	111.902
1200	1.83333	40.0882	40.5441	81.9334

Tabela 4.17: Resultados das aproximações numéricas após a Calibração, onde os dados de mercado correspondem ao índice S&P 500 de dia 30 de Agosto de 2004. $S_0=1099.15$. $r=1.5\%$

K	T	Modelo de Difusão contínuo	Modelo de Difusão com Saltos	Modelo Heston
1030	0.0833333	0.010959327	0.012312763	0.011647966
1100	0.0833333	0.104284615	0.099792308	0.034461538
1185	0.0833333	0.04812	0.0117	0.476188667
1005	0.166667	0.017042683	0.015886179	0.013913618
1075	0.166667	0.064571059	0.069511628	0.074795866
1130	0.166667	0.050365169	0.043364045	0.002465169
1200	0.166667	0.439566667	0.423584444	0.266457778
1075	0.25	0.124544492	0.136345339	0.121059322
1150	0.25	0.050301136	0.051011364	0.006378409
1200	0.25	0.010963158	0.020005263	0.128063158
1040	0.333333	0.100389594	0.103510152	0.083711929
1070	0.333333	0.142218695	0.142047619	0.104407407
1135	0.333333	0.211048544	0.204330097	0.114893204
1205	0.333333	0.176302703	0.156797297	0.076667568
1075	0.583333	0.182381159	0.184134783	0.093817391
1150	0.583333	0.279979798	0.275262626	0.052801347
1250	0.583333	0.302611321	0.304245283	0.390750943
1050	0.833333	0.175676085	0.17567003	0.057383451
1100	0.833333	0.244717231	0.236670103	0.03171134
1175	0.833333	0.329347561	0.329932927	0.047170732
1225	0.833333	0.352531073	0.355926554	0.17619774
1025	1.33333	0.170043636	0.168443636	0.082094545
1075	1.33333	0.228980076	0.233190702	0.072925047
1125	1.33333	0.282847545	0.285854005	0.028303618
1200	1.33333	0.354404494	0.36834382	0.064161798
1005	1.83333	0.17244562	0.170311581	0.043074662
1050	1.83333	0.216156028	0.213056738	0.031539007
1100	1.83333	0.262578475	0.266552466	0.003605381
1200	1.83333	0.36968239	0.362514151	0.288261006

Tabela 4.18: Erros relativos das aproximações numéricas em contraste com os preços observados no mercado e correspondentes ao índice S&P 500 de dia 30 de Agosto de 2004.

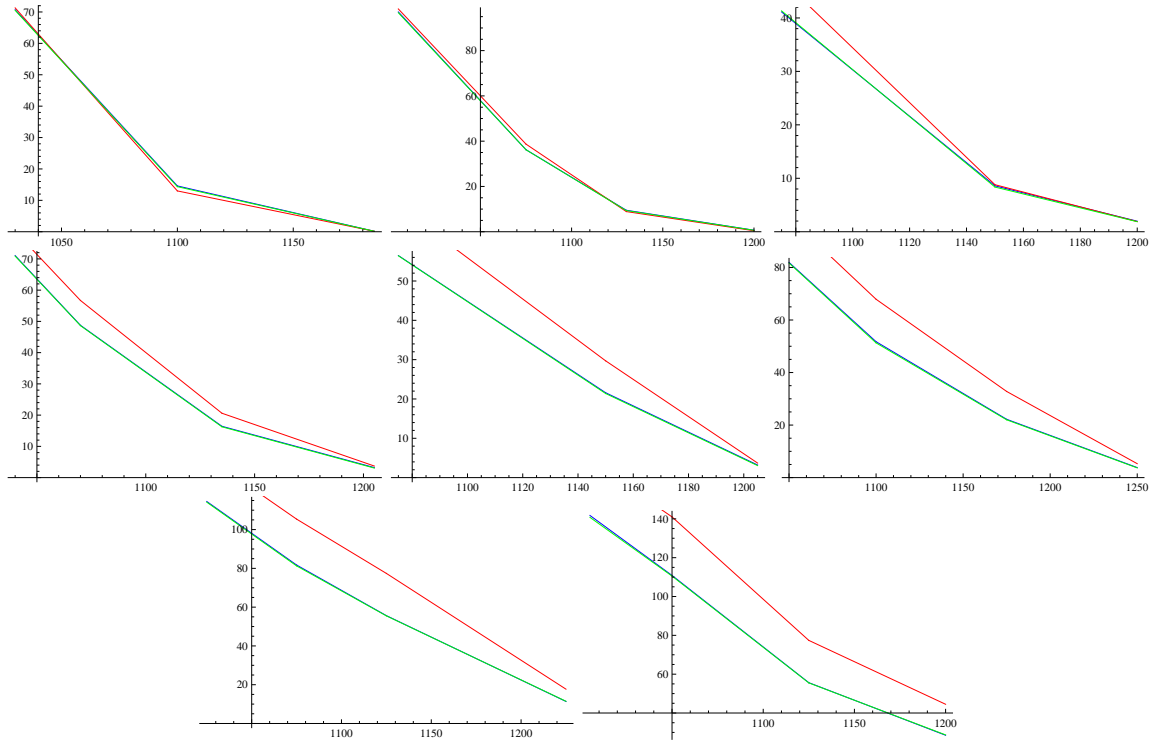


Figura 4.19: Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos de difusão contínuos. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.3333$, $T=0.5833$, $T=0.8333$, $T=1.3333$ e $T=1.8333$

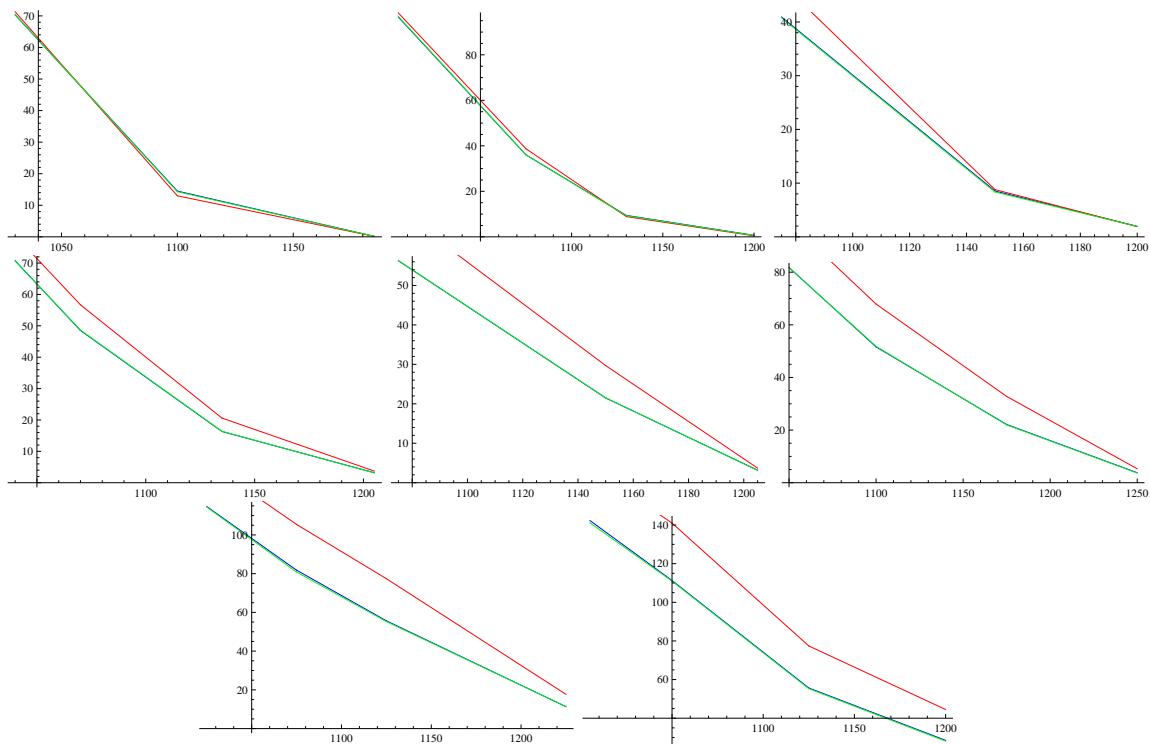


Figura 4.20: Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos de difusão com saltos. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.3333$, $T=0.5833$, $T=0.8333$, $T=1.3333$ e $T=1.8333$

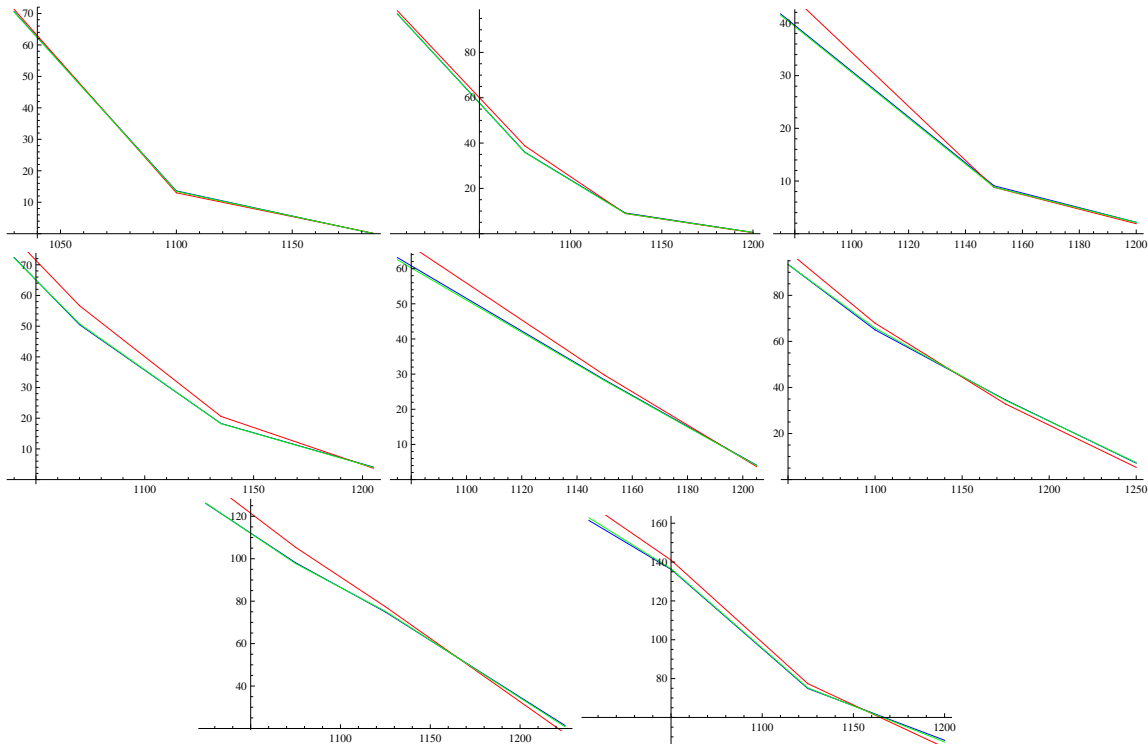


Figura 4.21: Relação Strike vs Preço da opção utilizando modelos com volatilidade estocástica. Da esquerda para a direita e de cima para baixo $T=0.0833$, $T=0.1667$, $T=0.25$, $T=0.3333$, $T=0.5833$, $T=0.8333$, $T=1.3333$ e $T=1.8333$

Apresentados os resultados numéricos obtidos podemos então tecer alguns comentários acerca dos mesmos. Devemos começar por referenciar a precisão das aproximações numéricas obtidas relativamente às respectivas soluções analíticas. Estes dois resultados encontram-se tão próximos que se torna bastante difícil distinguir as linhas verde e azul nas Figuras (4.19), (4.20) e (4.21). Este resultado significa também que os modelos numéricos utilizados são adequados na aproximação dos respectivos modelos teóricos.

Devemos também lembrar que os resultados obtidos na calibração do modelo de Merton conduzem a que a probabilidade de existência de saltos seja muito baixa. Desta forma, os saltos ocorrem com muito pouca frequência o que leva a que o modelo se aproxime bastante do modelo de difusão contínuo. Assim sendo, a precisão deste modelo é um pouco mais baixa do que seria esperado, especialmente nos casos de opções cuja data de maturidade é mais curta e onde é costume este tipo de modelo apresentar os melhores resultados.

O modelo de Heston mostra-se, novamente, mais preciso que os restantes em, praticamente, todas as situações testadas. É de notar que os casos em que este facto não ocorre ou estamos perante opções *fora do dinheiro* ou perante opções cuja data de maturidade é bastante curta. Desta forma, os novos resultados vem reforçar as conclusões tiradas após as primeiras calibrações efectuadas mostrando que o modelo de Heston apresenta as melhores condições para aproximar valores de mercado.

Conclusão

Os resultados numéricos iniciais mostram-nos que os métodos numéricos apresentados são capazes de devolver valores de opções bastante próximos daqueles que os modelos teóricos apresentam. Nesta fase inicial, ficamos um pouco cépticos relativamente ao resultados devolvidos pelo modelo com volatilidade estocástica, o modelo de Heston. No entanto, a calibração dos modelos trouxe algumas surpresas. A partir dela, pudemos observar que o modelo que se encontra mais próximo do mercado é o modelo de Heston. Desta forma, e como as aproximações numéricas mostram convergir para a solução analítica, é também este modelo que apresenta melhores resultados no que diz respeito às aproximações numéricas efectuadas após a calibração dos parâmetros. Apesar de tudo o modelo de Heston mostra-se mais eficiente no que diz respeito a opções *dentro do dinheiro*. Por sua vez, a existência de saltos no processo conduz-nos a uma maior precisão numérica no que diz respeito a opções *fora do dinheiro*. Desta forma, concluímos que a calibração dos parâmetros dos modelos em estudo tem uma enorme importância, pois permite-nos obter resultados cada vez mais fiáveis e próximos da realidade dos mercados.

Não podemos deixar de referir que o modelo de Black-Scholes, bem como o respectivo método de aproximação, apenas apresentaram resultados razoáveis na análise da segunda gama de valores de mercado. Nesta situação, a calibração do modelo com saltos conduziu-nos a parâmetros cujos baixos valores levam a uma baixa probabilidade de existência de saltos, ou seja, o modelo com saltos encontrava-se bastante próximo do de Black-Scholes.

Devemos ter em conta que os resultados apresentados apenas dizem respeito a opções *vanilla*, o tipo de opções mais simples. Uma análise destas metodologias aplicadas a outro tipo de produtos derivados, como é o caso das opções com barreira, pode ser alvo de um estudo futuro.

É também um interessante tema para uma posterior análise a utilização de outros métodos de aproximação numérica para proceder à valoração deste tipo de derivados, de forma a que os resultados obtidos possam ser confrontados com os obtidos pelas simulações de Monte Carlo.

Por fim, e uma vez que os modelos de Merton e de Heston mostram evidências de se complementarem, seria interessante proceder à valorização deste tipo de derivados utilizando um modelo que juntasse saltos e volatilidade estocástica.

Bibliografia

- Bandeiras, J. (2006), *Equações Diferenciais Estocásticas*, Trabalho final de curso, Instituto Superior Técnico.
- Black, F. and Scholes, M. (1973), 'The pricing of options and corporate liabilities', *The Journal of Political Economy* **vol. 81**, pag. 637–654.
- Cont, R. and Tankov, P. (2004), *Financial Modelling with Jump Processes*, CRC Press UK.
- Etheridge, A. (2002), *A Course in Financial Calculus*, 1st edn, Cambridge University Press, New York.
- Gatheral, J. (2006), *The Volatility Surface, A Practitioner's Guide*, John Wiley and Sons, New Jersey.
- Glasserman, P. (2003), *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, 1st edn, Springer, New York.
- Heston, S. L. (1993), 'A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options', *The Review of Financial Studies* **vol. 6**, pag. 327–343.
- Hull, J. c. (2006), *Option, Futures and Other Derivatives*, 6th edn, Prentice Hall.
- Kahalé, N. (2005), 'Smile interpolation and calibration of the local volatility model', *Risk Magazine* .
- Kahl, C. and Jäckel, P. (2005), 'Not-so-complex logarithms in the Heston model', *Wilmott* pp. pag. 94–103.
- Merton, R. C. (1976), 'Option pricing when underlying stock returns are discontinuous', *Journal of Financial Economics 3* **vol. 1**, pag. 125–144.
- Mikosch, T. (1998), *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Moodley, N. (2005), *The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code*, Master's thesis, Faculty of Science, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P. (2007), *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, 3rd edn, Cambridge University Press, New York.
- Reis, G. (2004), *Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Estocásticas*, Trabalho final de curso, Instituto Superior Técnico.

Bibliografia

Wilmott, P. (2006), *On Quantitative Finance*, 2th edn, John Wiley & Sons.

Xu, J. (2005), *Pricing And Hedging Options Under Stochastic Volatility*, Master's thesis, The University of British Columbia.