

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Valorização de Derivados de Taxas de Juro Utilizando o Modelo de Hull-White

Pedro Teixeira

Mestrado em Engenharia Física

2009

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Valorização de Derivados de Taxas de Juro Utilizando o Modelo de Hull-White

Pedro Teixeira

Dissertação orientada por:
Doutor José Manuel Gonçalves
Professora Doutora Ana Nunes

Mestrado em Engenharia Física

2009

Resumo:

Neste trabalho são implementados métodos numéricos de construção de árvores trinomiais para a valorização de derivados financeiros de taxas de juro utilizando o modelo de Hull-White. É uma forma popular de modelar a evolução da taxa de juro instantânea. Estes métodos são testados através da utilização de soluções analíticas existentes para alguns instrumentos financeiros simples.

A calibração do modelo consiste em determinar os parâmetros de volatilidade que nos permitem calcular, através dos métodos numéricos desenvolvidos, os preços de derivados de taxas de juro existentes no mercado. Especificamente, foi utilizada a técnica de *Simulated Annealing* para minimizar a diferença entre os preços obtidos e os preços disponíveis no mercado. Esta técnica explora o processo de arrefecimento de um metal até atingir uma estrutura cristalina e é utilizada, geralmente, como método de optimização global de um sistema procurando a configuração de energia mínima.

Para a valorização de qualquer derivado financeiro, é necessário escolher correctamente o modelo e as técnicas a utilizar. No futuro, o objectivo será a integração destes métodos num sistema de valorização de derivados financeiros.

Palavras chave: Hull-White, derivados de taxas de juro.

Abstract:

In this work we developed numerical methods for the valuation of interest rate derivatives using trinomial trees consistent with de Hull-White model. It is a popular way of modeling the term structure of the instantaneous interest rate. These methods are tested using the available analytical solutions for the most simple financial derivatives.

The calibration of the model it's a way of finding the model's volatility parameters that allow us to correctly price the available interest rate derivatives. Specifically, we used the Simulated Annealing algorithm in order to minimize the difference between the model prices and the available calibration instruments. It explores the controlled cooling process of a metal in order to obtain a cristal and it's used, in general, as a way of finding the global minimum of a given function in a large space.

To correctly price any financial derivative, the knowledge of the models and technics available it's a requirement. In the future, the main objective is the integration of these methods in a system capable of valuing a large range of financial derivatives.

Key words: Hull-White, interest rate derivatives

Agradecimentos:

Ao José Gonçalves pela orientação e apoio constantes;

À empresa Closer por me ter dado esta oportunidade; em especial ao João Cruz por ter apostado em mim;

À Professora Ana Nunes pelo contributo importante para melhorar este trabalho;

Aos meus amigos por todo o apoio que me deram;

Por fim, um agradecimento especial à minha família, a quem dedico este trabalho.

Lista de Figuras

1.1	Posições curta (a vermelho) e longa (a azul)	4
1.2	Dados para 2009 de taxas de juro EURIBOR	9
1.3	Exemplo de um contrato <i>swap</i>	11
2.1	Um processo de Wiener com $\Delta t = 1$	17
2.2	Um processo de Wiener com $\Delta t = 0.01$	17
2.3	Dois processos de Ornstein-Uhlenbeck independentes. $r(0) = 0.01$ (a vermelho), $r(0) = 0.1$ (a azul), $b = 0.05$, $a = 0.05$ e $\sigma = 0.01$. A tracejado são os dois processos com $dW(t) = 0$	28
3.1	Árvore trinomial com ramificação normal.	36
3.2	ramificações do tipo normal, decrescente e crescente.	38
3.3	Primeira fase de construção de uma árvore trinomial com três passos. $\Delta t = 1$, $\sigma = 0.02$ e $a = 0.05$. Numeração dos 8 primeiros nós.	41
3.4	Segunda fase de construção de uma árvore trinomial com três passos (árvore de R_2 a cinzento e árvore de R_1 a vermelho). $\Delta t = 1$, $\sigma = 0.02$ e $a = 0.05$	44
3.5	Exemplo de uma árvore trinomial com Δt variável.	46
3.6	Convergência dos valores de <i>bonds</i> obtidos através da árvore trinomial.	48
3.7	Convergência dos valores de <i>bonds</i> obtidos através da árvore trinomial com Δt variável.	49
3.8	Convergência dos valores de opções de <i>bonds</i> obtidos através da árvore trinomial.	50
4.1	Algoritmo de Simulated Annealing.	65
4.2	Árvore trinomial do exemplo da secção 4.2 (R_1 a cinzento e R_2 a vermelho).	66
4.3	Comparação entre os valores de <i>swaptions</i> dos conjuntos A e B	67
4.4	Comparação entre as árvores trinomiais A (a preto) e B (a vermelho) antes da calibração.	67
4.5	Árvore trinomial ajustada aos valores de mercado (obtidos por simulação) após calibração.	68

4.6	Parâmetros finais obtidos após calibração com valores de mercado obtidos por simulação.	68
4.7	Comparação entre as árvores trinomiais A (a preto) e B (a vermelho) antes da calibração.	69
4.8	Comparação entre os valores de <i>swaptions</i> dos conjuntos A e B (com Δt variável) antes da calibração.	69
4.9	Comparação entre as árvores trinomiais A (a preto) e B (a vermelho) depois da calibração.	69
4.10	Comparação entre os valores de <i>swaptions</i> dos conjuntos A e B (com Δt variável) depois da calibração.	70
4.11	Variação do erro em função do número de iterações para diferentes valores de parâmetros de volatilidade (constante) ($\sigma = 0.1$ (vermelho), $\sigma = 0.3$ (verde), $\sigma = 0.4$ (laranja), $\sigma = 0.5$ (azul) e $\sigma = 0.6$ (preto).	70
4.12	Variação do erro em função do número de iterações para valores de parâmetros de volatilidade (constante) distintos ($\sigma = 0.02$ (preto) e $\sigma = 0.6$ (vermelho)).	71

Lista de Tabelas

3.1	Valores de R_1 , p_u , p_m e p_d para os nós da árvore da figura 3.3.	40
3.2	Curva inicial de taxas de juro.	43
3.3	Valores de R_1 , R_2 , p_u , p_m , p_d e Q para os nós da árvore da figura 3.4. . .	45
3.4	Curva inicial de taxas de juro para Δt variável.	45
3.5	Comparação de <i>discount bonds</i> : árvore trinomial vs. soluções analíticas.	47
3.6	Comparação de <i>discount bonds</i> com Δt variável: árvore trinomial vs. soluções analíticas.	48
3.7	Comparação de valores de opções de <i>discount bonds</i> : árvore trinomial vs. soluções analíticas.	50
4.1	56
4.2	Propriedades dos nós da árvore da figura 4.2.	57
4.3	Parâmetros iniciais para o teste de convergência do modelo.	61
4.4	Comparação entre V_A e V_B , antes e depois da calibração. V representa o valor de uma <i>swaption</i> sobre um notional de 1000 (em qualquer unidade monetária).	62
4.5	Curva inicial de taxas de juro utilizada para testes com Δt variável.	63
4.6	Comparação entre V_A e V_B , antes e depois da calibração, com Δt variável. V representa o valor de uma <i>swaption</i> sobre um notional de 1000 (em qualquer unidade monetária).	64

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Introdução aos derivados financeiros	2
1.1.1	Arbitragem	2
1.1.2	<i>Forwards</i> e Futuros	2
1.1.3	Opções	4
1.2	Taxas de Juro	5
1.2.1	Frequência de capitalização	6
1.2.2	Tipos de taxas de juro	7
1.2.3	A curva de taxas de juro	8
1.2.4	Derivados de taxas de juro	9
1.3	Síntese	12
2	Modelos financeiros	15
2.1	Processos estocásticos	15
2.1.1	Processos estocásticos contínuos no tempo	15
2.1.2	O processo de Wiener	16
2.1.3	O preço de activos	16
2.2	O modelo de Black Scholes	18
2.2.1	A equação diferencial de Black-Scholes	18
2.2.2	Fórmulas para opções europeias	21
2.3	Derivados de taxas de juro: os modelos padrão	22
2.3.1	O modelo de Black	22
2.4	Modelos <i>short rate</i>	26
2.4.1	Introdução	26
2.4.2	O modelo de Vasicek (modelo de equilíbrio)	27
2.4.3	O modelo Ho-Lee	29
2.4.4	O modelo Hull-White de um factor	30
2.4.5	Opções de obrigações	31
2.5	LIBOR <i>market model</i> (LMM)	32

3	Métodos numéricos	35
3.1	Árvores de taxas de juro	35
3.1.1	Procedimento de construção de árvores	36
3.2	Árvores trinomiais com Δt variável	45
3.3	Comparação com soluções analíticas	46
3.3.1	Obrigações (Δt constante)	46
3.3.2	Obrigações (Δt variável)	47
3.3.3	Opções Europeias	49
4	Calibração do modelo	51
4.1	<i>Simulated Annealing</i>	53
4.1.1	Introdução	53
4.1.2	Adequabilidade	55
4.2	Resultados	56
5	Conclusões e perspectivas	73

Capítulo 1

Introdução

Os derivados são instrumentos financeiros cujo valor depende de outras variáveis mais básicas. Estas podem ser, por exemplo, acções, índices accionistas e produtos de mercadorias. São exemplos de derivados simples as opções, futuros e *forwards*. Surgiram nos mercados financeiros com o principal objectivo de reduzir o risco dos investidores e são hoje transaccionados diariamente em muitos mercados em todo o mundo. Os modelos matemáticos surgem com a necessidade de existirem regras para a determinação do valor destes produtos porque, apesar de existirem mercados (mercados organizados) onde são estabelecidos diariamente os seus preços, existe uma dificuldade associada à componente aleatória que existe na variação destes valores.

Além dos mercados organizados existe outro tipo - mercados *over-the-counter*. Nestes, o volume de transacções tem vindo a aumentar nos últimos anos apresentando mesmo valores superiores aos observados nos mercados organizados. As negociações são efectuadas, normalmente, tendo pelo menos uma instituição financeira como principal interveniente. As características dos contratos de derivados OTC são acordadas directamente entre as duas entidades sem haver a necessidade de cumprimento de regras impostas por mercados organizados. Derivados de taxas de juro (produtos financeiros cujo valor depende do valor da taxa de juro) como *swaptions*, *caps* e opções de obrigações de taxas de juro são exemplos de produtos negociados em mercados *over-the-counter*.

Apesar de existirem modelos matemáticos que permitem a rápida determinação do preço de alguns tipos de derivados, por vezes é necessário recorrer à discretização destes modelos e à utilização de métodos numéricos. Nestes casos é bastante importante saber distinguir e escolher o método adequado para cada tipo de derivado pois métodos diferentes podem dar origem a diferentes valores para o mesmo produto. Assim, é necessário conhecer bem os modelos existentes bem como construir da melhor forma os métodos numéricos para conseguirmos obter o valor “mais justo”.

A primeira parte deste trabalho consiste na descrição dos principais produtos derivados em mercados organizados e *over-the-counter* bem como na introdução às taxas de juro.

1.1 Introdução aos derivados financeiros

1.1.1 Arbitragem

O conceito de arbitragem é fundamental na valorização de derivados financeiros. Esta existe, por exemplo, quando se verifica uma discrepância entre o preço de produtos as mesmas características (em particular o *payoff*) em mercados diferentes ou até no mesmo mercado. Pode ser usada arbitragem tomando posições opostas em dois mercados diferentes relativamente ao mesmo produto com o objectivo de fazer lucro.

1.1.2 *Forwards* e Futuros

Um *forward* é um derivado simples no qual existe a obrigação de comprar ou vender um bem ou activo, numa determinada data futura e a um determinado preço. Em contraste, um contrato *spot* é um acordo no qual a compra/venda do activo é realizada no presente. Num contrato *forward* uma das partes assume uma posição na qual concorda em vender o produto por um preço determinado e numa data determinada - posição curta. A outra parte assume uma posição longa, concordando em realizar a compra na mesma data e ao mesmo preço.

Exemplificando, vamos supor que uma empresa portuguesa necessita de comprar meio milhão de dólares daqui a seis meses. Com o objectivo de se proteger contra

movimentações de mercado recorre a um banco que disponibiliza as seguintes taxas de câmbio relativas a contratos *forward*:

data	preço de 1\$
actual	0,7805
1 mês	0,7943
6 meses	0,8216

A empresa entra num contrato *forward* com o banco, comprometendo-se a comprar \$2.000.000 por $2.000.000 \times 0.8216 = 1.643.200\text{€}$, assumindo assim uma *posição longa*. O banco é obrigado a vender os dólares por este preço (*posição curta*). Podemos agora analisar dois cenários:

1. o preço sobe para 0,83€
2. o preço desce para 0,81€

No primeiro cenário, a empresa ganharia $1.660.000 - 1.643.200 = 16.800\text{€}$, pois conseguiria comprar os dólares a um preço menor (acordado no *forward*) do que 0,83€. O banco perderia 16.800€. No segundo cenário a empresa perderia $1.643.200 - (0.81 \times 2.000.00) = 23.000\text{€}$ e o banco ganharia 23.000€. De uma forma geral, o ganho de um contrato *forward* (numa posição longa) é dado por

$$S_T - K \tag{1.1}$$

onde S_T é o preço do activo na data de entrega (T) e K o preço de entrega nessa mesma data. Em posição curta, o ganho é dado por

$$K - S_T \tag{1.2}$$

Na figura 1.1 estão representados os perfis de ganho para as posições longa e curta. Os contratos de futuros são, tal como os contratos *forward*, um acordo em comprar ou vender um activo numa determinada data a um determinado preço. Ao contrário dos contratos *forward*, os *futuros* são transaccionados em mercados organizados que assumem a regulação e o supervisionamento. O que distingue melhor estes dois tipos de contratos é o facto de, nos *futuros*, não ser especificada a data exacta de entrega, sendo normalmente definido apenas o mês.

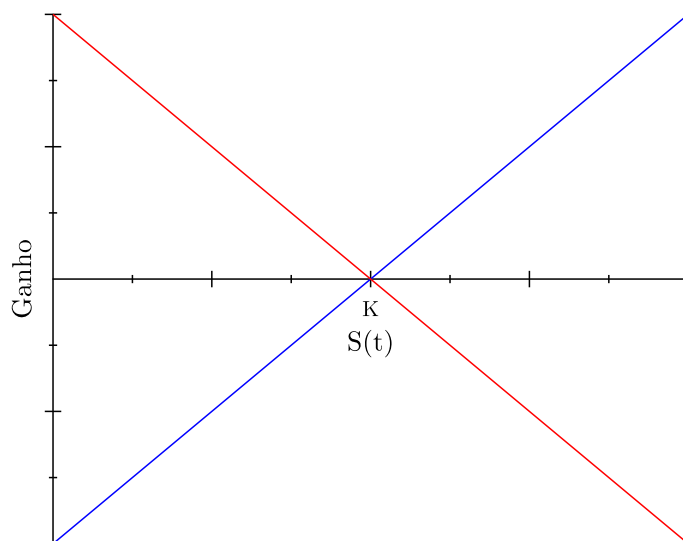


Figura 1.1: Posições curta (a vermelho) e longa (a azul)

1.1.3 Opções

Este tipo de derivados, geralmente transaccionados em mercados organizados, têm características semelhantes às dos *forwards* e às dos futuros. Distinguem-se destes por possibilitarem uma opção de compra/venda. Opções *call* e *put* são os tipos mais simples. O primeiro dá ao comprador o direito de comprar uma quantidade específica de um activo subjacente, por um determinado preço e no final de um determinado período de tempo. O segundo, (*put*), dá ao comprador o direito de vender. O preço mencionado no contrato é conhecido como *strike price*. A data para o exercício do direito de compra/venda é conhecida como data de maturidade.

As opções podem ainda ser divididas em europeias e americanas. Nas europeias a opção pode ser exercida apenas na data de maturidade enquanto que nas opções Americanas a opção pode ser exercida numa data anterior à de maturidade. As opções mencionadas são do tipo *vanilla*.

No mercado existe uma grande variedade de opções exóticas que, por serem mais complexas, são mais difíceis de valorizar. Mais à frente, neste texto, serão descritas em maior detalhe as opções de taxas de juro, nomeadamente opções de obrigações e *swaptions*.

Um crescente número de negociadores de derivados bem como a sua elevada liquidez tornaram estes produtos financeiros um grande sucesso nos mercados a nível mundial. Estes negociadores podem ser distinguidos por três categorias: arbitragistas, *hedgers* e especuladores. Os arbitragistas têm como principal objectivo procurar discrepâncias em diferentes mercados assumindo posições diferentes em cada um tentando obter lucro. Os *hedgers* utilizam os derivados como forma de se protegerem contra eventuais futuras movimentações do mercado e os especuladores limitam-se a “apostar” nos valores futuros dos activos ou bens.

As opções europeias de compra e venda sobre um mesmo activo e com as mesmas características podem ser relacionadas através da propriedade *put-call parity*. Este resultado vem do facto de as opções europeias apenas poderem ser exercidas na data de maturidade, T . Suponhamos que temos um portfolio composto pela compra de um activo (S) e de uma opção de venda desse activo (P) e a venda de uma opção de compra sobre o mesmo activo (C). Este portfolio pode ser descrito por

$$\Pi = S + P - C. \quad (1.3)$$

Na data de maturidade iremos obter $S + \max(K - S, 0) - \max(S - K, 0) = K$. Para não haver hipóteses de arbitragem, temos que no instante t o portfolio vale $Ke^{-r(T-t)}$. Assim, temos a relação

$$S + P - C = Ke^{-r(T-t)} \quad (1.4)$$

1.2 Taxas de Juro

A taxa de juro reflecte, em determinada situação, a quantidade que teremos que pagar no futuro ao fazermos um empréstimo. É normalmente composta por duas componentes,

uma definida pelo banco central e outra que está associada ao risco de crédito existente no mercado.

É um factor importante em praticamente todos os tipos de derivados financeiros. Porém, em alguns o seu valor é aproximadamente constante quando se consideram intervalos de tempo muito pequenos. Em derivados como opções sobre obrigações de taxas de juro, onde o tempo de vida é maior, torna-se necessário modelar o movimento desta variável subjacente a este produto financeiro já que o *payoff* está associado às taxas de juro. Uma obrigação é um contrato no qual o comprador, mediante um investimento inicial, obtém, na maturidade, um rendimento pré-estabelecido. Este produto pode pagar dividendos (conhecidos como cupões) em determinadas datas. Denomina-se de obrigação cupão-zero a uma obrigação em que os cupões são pagos no final do contrato. O tempo de vida de uma obrigação pode ser de dezenas de anos, em contraste com o tempo de vida de uma opção que raramente excede um ano.

Nesta secção descrevem-se os vários tipos de taxas de juro, frequência de capitalização, taxas-zero e taxas-*forward*. São referidos derivados de taxas de juro e a sua utilização no mercado.

1.2.1 Frequência de capitalização

Considere-se um investimento I a n anos a uma taxa anual igual a R . É fácil ver que, ao fim de um ano, o valor deste investimento será igual a

$$I + IR \tag{1.5}$$

Se designarmos $I(t)$ o valor do investimento no instante t (anos), ao fim de dois anos temos

$$I(2) = (I(0) + I(0)R_1) + (I(0) + I(0)R_1)R_1 \tag{1.6}$$

Ao fim de n anos teremos então,

$$I(n) = I(0) (1 + R_1)^n \tag{1.7}$$

Este caso simples corresponde a uma capitalização anual. Com capitalização semi-anual vamos ter, por exemplo, ao fim de dois anos:

$$I(2) = \left(I(0) + I(0) \frac{R_1}{2} \right) + \left(I(0) + I(0) \frac{R_1}{2} \right) \frac{R_1}{2} \quad (1.8)$$

Se o cálculo for feito com capitalização de m vezes por ano teremos

$$I(n) = I(0) \left(1 + \frac{R_m}{m} \right)^{mn} \quad (1.9)$$

Com capitalização contínua basta notar que

$$I(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} I(0) \left(1 + \frac{R_m}{m} \right)^{mn} = I(0) e^{Rn} \quad (1.10)$$

Esta equação representa então o valor do investimento I ao fim de n anos com uma taxa de juro com capitalização contínua.

Adicionalmente, podemos escrever a relação entre uma taxa com capitalização de frequência m , R_m , e uma taxa com capitalização contínua, R_c :

$$I(0) e^{R_c n} = I(0) \left(1 + \frac{R_m}{m} \right)^{mn} \quad (1.11)$$

1.2.2 Tipos de taxas de juro

Taxas cupão-zero

Uma taxa cupão-zero é a taxa de juro que é aplicada num investimento no qual não existem pagamentos intermédios ao final do contrato. O valor principal e os juros são devolvidos na íntegra na data final. Esta taxa é geralmente referida como *taxa cupão-zero a n anos* ou simplesmente *taxa-zero a n anos*. Como exemplo, se uma taxa-zero a 5 anos com capitalização contínua for cotada a 4% ao ano, significa que se investirmos 1000€, no final de 5 anos teremos um total de

$$1000 \times e^{0.04 \times 5} = 1221.4\text{€} \quad (1.12)$$

Taxa *forward*

As taxas *Forward* são as taxas de juro relativas a períodos de tempo no futuro. Podem ser calculadas a partir das taxas *cupão-zero*. Se soubermos as taxas *cupão-zero* R_1 e R_2 para os instantes T_1 e T_2 respectivamente, a taxa *forward* entre T_1 e T_2 é calculada através da expressão:

$$R_F = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{T_2 - T_1} \quad (1.13)$$

Se quisermos determinar a taxa *forward* instantânea para uma maturidade T basta pegar na fórmula anterior e fazer $T_2 \rightarrow T_1$:

$$R_F = R + T \frac{\partial R}{\partial T} \quad (1.14)$$

onde R é a taxa-zero para uma maturidade T . R_F representa então a taxa *forward* que é aplicada a um intervalo de tempo muito curto que começa em T .

1.2.3 A curva de taxas de juro

A *yield curve* traduz a relação entre a taxa de juro e o tempo até à maturidade para um determinado empréstimo e reflecte a expectativa do mercado em relação à evolução destes valores. A *term structure* das taxas de juro é uma descrição matemática formal desta relação. Na maioria dos casos, mas nem sempre, a curva é crescente. É analisada frequentemente com o objectivo de procurar oportunidades de negócio ou apenas para perceber determinadas condições económicas. Apesar de ser uma curva, apenas alguns pontos são conhecidos com certeza. Os restantes são obtidos por interpolação. A título de exemplo podemos ver, na figura 1.2, dados do ano corrente de valores EURIBOR ¹

A curva típica cresce assintoticamente e existem duas possíveis explicações para este facto. A primeira é a de que o mercado antecipa uma subida na taxa sem risco. Se os investidores optarem por prazos maiores então serão compensados pela eventual subida das taxas.

¹http://www.euribor.org/html/content/euribor_data.html

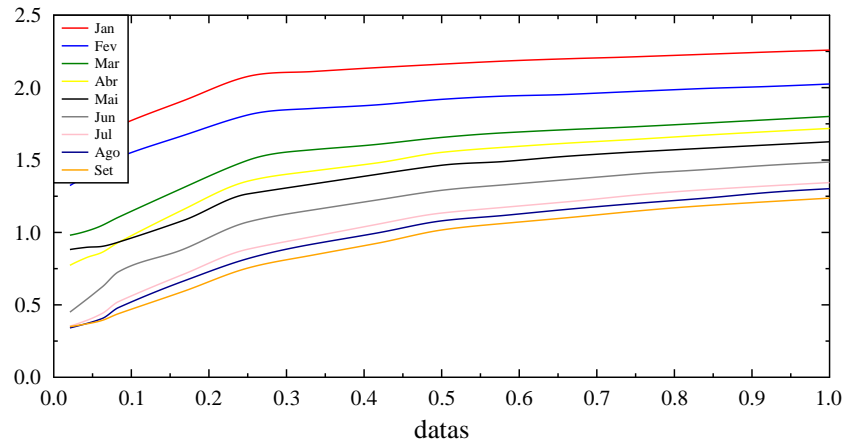


Figura 1.2: Dados para 2009 de taxas de juro EURIBOR

Contudo, as taxas também podem descer. Assim, outra explicação pode ser o facto de maturidades maiores significarem riscos mais elevados na medida em que aumenta a probabilidade de um evento trágico prejudicar o investimento.

Curvas de taxas decrescentes (taxas mais elevadas para maturidades menores e taxas menores para maturidades maiores) podem ter lugar na economia a certa altura. Basta haver uma previsão de queda das taxas por parte do mercado.

1.2.4 Derivados de taxas de juro

Hoje em dia, o mercado de derivados de taxas de juro representa o maior mercado de derivados no mundo financeiro. Apesar de existirem estimativas ², é difícil avaliar a dimensão deste mercado devido ao facto de ser do tipo *over-the-counter*.

De seguida serão descritos alguns dos principais produtos derivados de taxas de juro.

Swaps e Swaptions

O primeiro *swap* foi realizado entre a IBM e o Banco Mundial em 1981. Contudo, apesar de ser um produto recente, em 1987 a *International Swaps and Derivatives Association*

²Estima-se que 80% das 500 maiores empresas a nível mundial recorreram a derivados de taxas de juro com o objectivo de controlar os lucros.

relatou o facto de que o mercado de *swaps* teria atingido um valor nocional total de \$865.7 biliões até à data ³. Mais recentemente, em 2008, o *BIS* (*Bank for International Settlements*) registou um total de \$328.114 biliões só no mês de Dezembro.

O tipo mais simples de *swap* é o *plain vanilla swap*. Num contrato deste tipo uma empresa ou entidade financeira compromete-se a apagar um valor determinado a partir do valor nocional com uma taxa fixa durante um período de tempo predeterminado. Em troca, recebe um valor calculado a partir de uma taxa variável sobre o mesmo valor nocional e durante o mesmo período de tempo. Geralmente, o nocional não é transaccionado.

Considere-se o seguinte exemplo em que duas entidades, **A** e **B**, entram num contrato *swap* com o objectivo de se protegerem contra eventuais movimentações do mercado: Suponha-se que, antes do *swap*, **A** pagava um empréstimo a uma taxa variável $LIBOR + 1.80\%$ e **B** encontrava-se a pagar um empréstimo a uma taxa fixa de 6% . Entram num contrato *swap* no qual **A** se compromete a pagar a **B** uma taxa fixa de 7% e **B** se compromete a pagar uma taxa $LIBOR + 0.6\%$ a **A**, como se vê na figura 1.3.

- **A** paga uma taxa fixa a **B** (**A** recebe uma taxa variável).
- **B** paga uma taxa variável a **A** (**B** recebe uma taxa fixa).

Com o contrato *swap* a situação final de cada entidade é a seguinte:

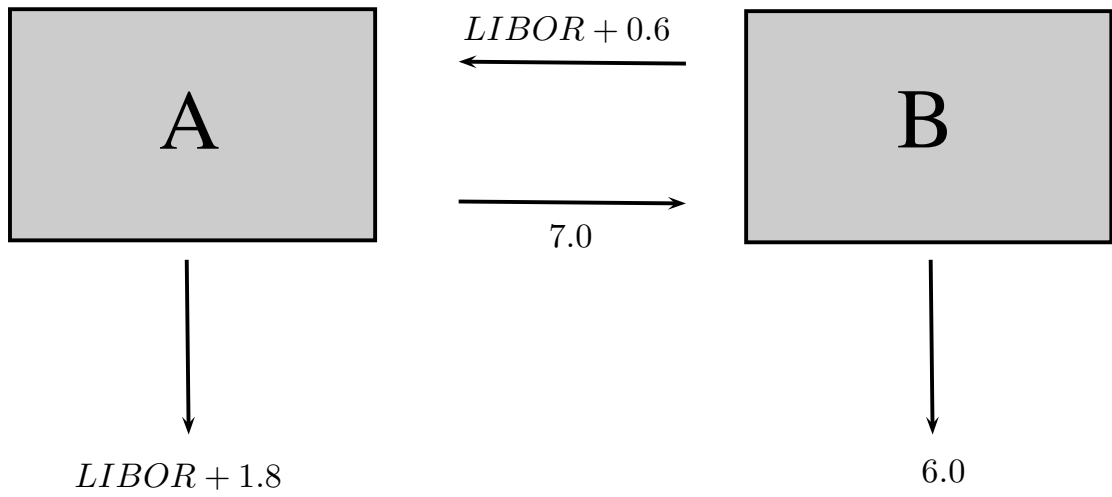
$$Total_A = -7.0 + (LIBOR + 0.6) - (LIBOR + 1.5) = -7.9\% \quad (1.15)$$

$$Total_B = +7.0 - (LIBOR + 0.6) - 6.0 = -(LIBOR - 0.4)\% \quad (1.16)$$

No início do contrato o seu valor é calculado de forma a que tenha um valor presente igual a zero. Posteriormente os fluxos são calculados periodicamente sobre o valor nocional predeterminado.

O termo *swaption* é normalmente utilizado para opções sobre taxas de juro. O detentor tem o direito (não a obrigação) de entrar num contrato *swap* sobre taxas de juro numa

³na escala europeia um bilião equivale a um milhão de milhões ou 10^{12}

Figura 1.3: Exemplo de um contrato *swap*.

determinada data no futuro. As *swaptions* podem ser usadas, por exemplo, com o objectivo de obter a garantia de que a taxa de juro fixa a pagar por um empréstimo, numa data futura, não exceda um determinado valor. São uma alternativa a *forward swaps*. Estes não têm custo inicial mas incluem a obrigação de entrar no contrato *swap*. Com uma *swaption* é possível tirar proveito de movimentos de taxas de juro ao mesmo tempo que permite uma protecção contra movimentos indesejados.

Este produto tem um papel importante neste trabalho como se poderá constatar na secção 4.

Caps e floors

Um *cap* de taxas de juro é um instrumento financeiro OTC (*over-the-counter*) e pode ser entendido como um empréstimo a uma taxa variável no qual esta não pode ser superior a um determinado valor denominado de *strike*. Os pagamentos são feitos periodicamente e os valores correspondem à diferença entre estas duas taxas aplicadas a um notional. Este instrumento pode ser interpretado como uma composição de várias opções europeias com a data de maturidade igual a cada período do *cap*. De forma semelhante define-se um *floor* como sendo um empréstimo com uma taxa de juro variável que, caso seja menor que um determinado *strike* numa determinada data, implica a existência de um pagamento correspondente à diferença entre as duas taxas.

Adicionalmente, um *cap* pode ser entendido como uma série de opções europeias do tipo *call* (ou *caplets*) que existem para cada período existente no *cap*. Analogamente, um *floorlet* é uma série de opções europeias do tipo *put*.

1.3 Síntese

A segunda parte deste texto incide nos principais modelos financeiros de derivados de taxas de juro. Começa com uma introdução aos processos estocásticos e termina com a descrição mais detalhada do principal modelo utilizado neste estudo - o modelo *Hull-White*. Na terceira parte descreve-se o processo de construção de árvores trinomiais e discretização do modelo e fazem-se testes de comparação com soluções analíticas.

Por fim, nos dois últimos capítulos apresentam-se os resultados obtidos na valorização de *swaptions* através dos métodos desenvolvidos e discutem-se os mesmos.

Capítulo 2

Modelos financeiros

2.1 Processos estocásticos

O estudo de processos estocásticos é um passo importante para a compreensão da valorização de opções e outros derivados mais complexos. Apesar de a variação temporal do preço destes derivados não ser contínua na prática, prova-se que um estudo com variáveis contínuas (variação contínua no tempo e no preço) permite a obtenção de resultados satisfatórios.

A primeira relação entre o valor de um activo e as leis das probabilidades foi estabelecida por Bachelier, em 1900. Descreveu o valor de um activo como um processo estocástico onde o preço segue uma distribuição gaussiana e não possui informação sobre o seu futuro. De entre as muitas falhas deste modelo destaca-se o facto de este assumir que o valor de um activo não é influenciado pelo valor temporal do dinheiro. O mercado de acções teve o seu estudo iniciado meio século mais tarde por Markowitz donde se concluiu que as acções eram avaliadas através de uma medida de risco associado a uma acção reflectindo a sua recompensa.

Os primeiros modelos surgiram com o objectivo de serem aplicados a acções e só mais tarde foram generalizados e modificados para derivados de taxas de juro.

2.1.1 Processos estocásticos contínuos no tempo

Muitas vezes assume-se que os preços de acções seguem um processo Markoviano. Um processo deste tipo tem como característica principal o facto de a previsão do valor futuro

não depender de valores passados, depende apenas do presente. Se soubermos o preço presente de um derivado, então só necessitamos dos valores das variáveis subjacentes neste instante para prevermos o preço futuro. Os valores históricos deste activo não são relevantes neste caso. Assim, devido à existência de incertezas no valor das variáveis no futuro, é necessário a utilização de distribuições de probabilidades. A propriedade de Markov significa que o estado futuro depende apenas do estado actual.

O comportamento aleatório de um activo financeiro resulta principalmente da rápida reacção dos mercados a qualquer nova informação sobre o activo ou sobre o mercado em geral.

2.1.2 O processo de Wiener

Um processo de Wiener é um tipo particular de um processo de Markov com média igual a zero e variância igual a 1.0. Formalmente, uma variável z segue um processo de Wiener se apresentar as seguintes características:

- Num período Δt a variação Δz é igual a

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2.1)$$

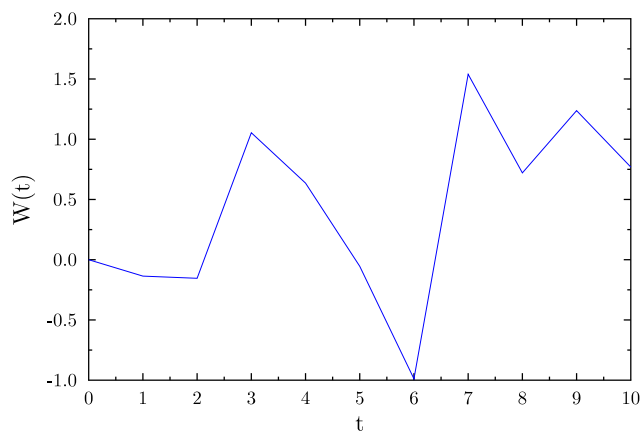
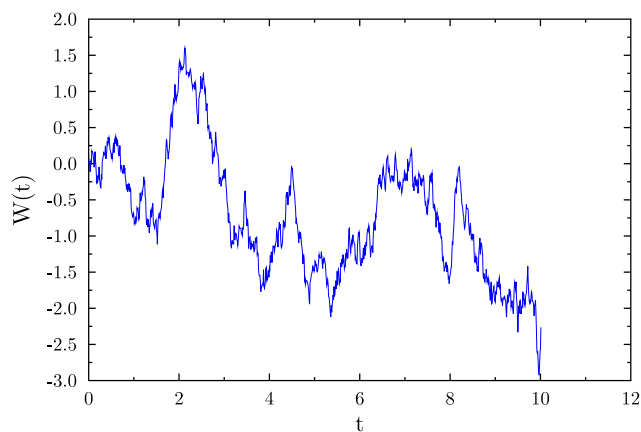
onde ϵ tem uma distribuição normal $\phi(0, 1)$

- Os valores de Δz para diferentes intervalos de tempo são independentes entre si (propriedade de Markov).

Da primeira característica retiramos que Δz apresenta uma distribuição normal de média igual a zero, desvio padrão igual a $\sqrt{\Delta t}$ e variância Δt . Nas figuras 2.1 e 2.2 podemos ver exemplos de processos de Wiener com diferentes valores de Δt

2.1.3 O preço de activos

Em geral, na valorização de derivados, assume-se uma equação diferencial estocástica para a descrição do processo seguido por uma variável que representa o preço de um activo. Black e Scholes sugeriram, em 1973, o movimento Browniano geométrico como a

Figura 2.1: Um processo de Wiener com $\Delta t = 1$.Figura 2.2: Um processo de Wiener com $\Delta t = 0.01$.

melhor forma de representar o processo seguido pelo valor de um activo. A equação

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.2)$$

descreve o processo seguido por um activo de valor S onde μ e σ são constantes conhecidas que representam, respectivamente, a flutuação e a volatilidade. Dividindo esta equação

por S obtemos outra que descreve a variação relativa de S :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (2.3)$$

Esta equação apresenta um termo determinístico, μdt , e um termo estocástico dz . Este último é conhecido como movimento Browniano geométrico.

As equações 2.2 e 2.3 são exemplo de um processo de Itô pois μ e σ dependem de S e de t . Em geral, a equação estocástica para uma variável que segue um processo de Itô é dada por

$$dS = \mu(S, t)dt + \sigma(S, t)dz \quad (2.4)$$

Partindo do processo seguido por S podemos derivar o processo seguido por um derivado cujo valor depende de S . Para tal, é necessária a compreensão do comportamento de funções com variáveis estocásticas. Um dos resultados mais importantes do cálculo estocástico é o lema de Itô que se define de seguida ([11]).

Lema 1 (Lema de Itô) *Suponhamos que $X(t)$ segue um processo estocástico da forma*

$$dX(t) = a(X, t)dt + b(X, t)dW(t) \quad (2.5)$$

para $0 \leq t \leq T$. Se $f(X(t))$ é uma função em \mathbb{C}^2 , então o diferencial estocástico do processo $Y(t) = f(X(t))$ existe e é dado por

$$df(X(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial X(t)} a(X, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} b^2(X, t) \frac{\partial^2 f}{\partial X(t)^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X(t)} b(X, t) dW(t) \quad (2.6)$$

2.2 O modelo de Black Scholes

2.2.1 A equação diferencial de Black-Scholes

Um derivado cujo valor, C , depende no preço S do activo no instante t é uma função $C(t, S)$. O lema de Itô afirma que o processo seguido por $C(t, S)$ é dado por

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial S} \mu(t, S) + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2(t, S) \right) dt + \left(\frac{\partial C}{\partial S} \sigma(t, S) \right) dz \quad (2.7)$$

onde $C(t, S)$ está de acordo com a equação 2.4. Por exemplo, se S segue o processo dado pela equação 2.2 então C apresenta uma variação

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial S} \mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \left(\frac{\partial C}{\partial S} \sigma S \right) dz \quad (2.8)$$

que também apresenta as componentes determinística e estocástica. O ponto mais relevante desta última equação é o facto de incluir o mesmo factor estocástico do processo seguido pelo activo subjacente. Assim, é possível compor um portfolio de forma a eliminar esta fonte de incerteza (ver [7]). Considere-se um portfolio constituído por uma posição curta numa opção e por uma posição longa em unidades de $\partial C/\partial S$. O valor do portfolio é então dado por

$$P = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S \quad (2.9)$$

A variação de P depende, como é fácil de perceber, do valor do activo subjacente e, consequentemente, do valor da opção. Assim, temos

$$dP = -dC + \frac{\partial C}{\partial S} dS \quad (2.10)$$

Substituindo dC e dS das equações 2.2 e 2.8 obtemos

$$dP = - \left(\frac{\partial C}{\partial S} \mu S - \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt - \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S dz + \frac{\partial C}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dz) \quad (2.11)$$

e simplificando ficamos com

$$dP = - \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt \quad (2.12)$$

que não depende de dz . Assim, o portfolio não tem risco e a sua variação dP/P deve ser igual à taxa sem risco, r :

$$\frac{dP}{P} = \frac{- \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt}{-C + \frac{\partial C}{\partial S} S} = r dt \quad (2.13)$$

A conhecida equação diferencial de Black-Scholes é obtida arranjando a equação anterior:

$$- \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt = r \left(-C + \frac{\partial C}{\partial S} S \right) dt \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0 \quad (2.15)$$

Além do referido anteriormente, assume-se, na obtenção desta equação, que:

- É possível recorrer a uma taxa de juro sem risco durante o tempo de vida da opção.

- Não existem quaisquer custos de transacção na gestão de uma carteira constituída por opções e seus activos financeiros subjacentes.
- Não existem possibilidades de arbitragem.
- O activo financeiro é infinitamente divisível.
- As transacções são feitas em tempo contínuo.
- O activo financeiro não dá quaisquer dividendos durante o tempo de vida da opção.

As várias soluções desta equação diferencial correspondem aos diferentes produtos derivados que têm S como variável subjacente (aplicando as respectivas condições fronteira). No caso de uma opção europeia do tipo *call* a condição inicial é [3]

$$C = \max(S - K, 0) \quad \text{quando } t = T \quad (2.16)$$

e, para uma opção europeia do tipo *put*,

$$C = \max(K - S, 0) \quad \text{quando } t = T \quad (2.17)$$

Exemplo de aplicação a contratos *Forward*

Segue-se um exemplo que serve de ilustração ao lema de Itô. Aqui considera-se um contrato *Forward* num activo sem dividendos onde se assume uma taxa r , livre de risco e igual para todas as maturidades. O valor do *forward* em $t = 0$ é igual a (ver [7], equação 5.1)

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad (2.18)$$

onde S_0 é o preço *spot* em $t = 0$ e T é a maturidade do contrato.

Neste exemplo interessa-nos analisar a evolução do valor do contrato com o tempo. Assim, definimos F como o valor deste contrato num instante t e S como o valor do preço *spot* no mesmo instante. Assim podemos escrever

$$F = S e^{r(T-t)} \quad (2.19)$$

Assumindo que S segue um processo descrito pela equação 2.2, podemos usar o lema de Itô para descrever o processo para F . Usando a equação 2.8 e notando que, pela equação 2.19 temos

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}$$

obtemos a equação que descreve o processo para F :

$$dF = \left[e^{r(T-t)} \mu S - rSe^{r(T-t)} \right] dt + e^{r(T-t)} \sigma S dz \quad (2.20)$$

Substituindo F por $Se^{r(T-t)}$ (equação 2.19) chegamos a

$$dF = (\mu - r)F dt + \sigma F dz \quad (2.21)$$

Assim, tal como S , F segue um movimento Browniano geométrico.

Como vimos, o lema de Itô é uma forma de determinar o processo estocástico seguido por uma função de uma variável através do processo seguido por essa mesma variável. O processo de Wiener dz subjacente à variável é exactamente o mesmo processo subjacente à função desta variável. Ambas estão sujeitas à mesma fonte de incerteza.

2.2.2 Fórmulas para opções europeias

As fórmulas que nos permitem calcular o valor presente de opções europeias do tipo *call* e *put* podem ser obtidas através da utilização da equação 2.15 impondo as condições fronteiras adequadas a cada tipo de opção. Podem ser escritas da seguinte forma (ver [7], cap. 13):

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (2.22)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (2.23)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.24)$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.25)$$

Nestas expressões, $N(x)$ é uma função que representa a distribuição de probabilidades cumulativa para uma distribuição normal. c e p são os valores presentes das opções *call* e *put* respectivamente e S_0 é o preço presente do activo subjacente. K representa o *strike* da opção, r a taxa de juro com risco zero e com capitalização contínua, σ a volatilidade (constante), e T a maturidade da opção.

2.3 Derivados de taxas de juro: os modelos padrão

Sendo instrumentos financeiros cujo valor depende de alguma forma do valor das taxas de juro, os derivados de taxas de juro são mais difíceis de valorizar do que outros produtos mais simples como opções de stock. É então necessária uma correcta modelação da *yield curve*. A dificuldade na valorização aumenta quando consideramos uma volatilidade variável ao longo desta curva.

Esta secção é dedicada à descrição dos principais modelos padrão de valorização dos mais utilizados derivados de taxas de juro *over-the-counter* (opções de obrigações, *caps/floors* e opções de *swaps*). São apresentados e analisados alguns resultados analíticos e são discutidas as suas vantagens e limitações.

2.3.1 O modelo de Black

O modelo de Black, inicialmente apresentado por Fisher Black em 1976 como uma variante do modelo de Black-Scholes, tem como principal aplicação a valorização de opções de obrigações, *caps*, *floors* e *swaptions*. É uma abordagem popular na valorização de opções europeias de taxas de juro. A principal característica deste modelo é o facto de assumir que, na maturidade da opção, o valor da variável subjacente é log-normal. No caso de opções de obrigações, assume-se que o valor da obrigação é log-normal. Para um *cap* é assumida uma distribuição log-normal para as taxas juro entre cada período do *cap*. No caso de uma *swaption* considera-se que o *swap* tem uma distribuição log-normal.

Opções europeias

Considerando uma opção europeia sobre uma variável subjacente V , definem-se as seguintes variáveis:

T : maturidade da opção.

F : preço *forward* de V .

F_0 : valor de F em $t = 0$.

K : *strike* da opção.

$P(t, T)$: preço em t de uma obrigação sem cupões que tem um retorno de uma unidade monetária em T .

V_T : valor de V em T .

σ : volatilidade de F .

Esta opção é valorizada assumindo que $\ln V_T$ tem uma distribuição lognormal com média igual a F_0 e desvio padrão igual a $\sigma\sqrt{T}$. O *payoff* esperado é calculado utilizando a taxa em T . Como é mostrado em [7], as fórmulas para as opções do tipo *call* e *put* são dadas por

$$c = P(0, T)[F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \quad (2.26)$$

$$p = P(0, T)[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (2.27)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln[E(V_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.28)$$

$$d_2 = \frac{\ln[E(V_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.29)$$

e onde se assume $E(V_T) = F_0$.

É possível uma extensão ao modelo de *Black* para os casos em que o *payoff* é calculado a partir do valor de V em T mas é realizado noutra instante T^* (ver [7], cap. 26). Assim, as equações 2.26 e 2.27 transformam-se em

$$c = P(0, T^*)[F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \quad (2.30)$$

$$p = P(0, T^*)[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (2.31)$$

Caps e floors

Em 1.2.4 definimos um *cap* com um *strike* K como uma composição de opções (ou, neste caso, *caplets*) europeias cuja maturidade corresponde ao final de cada período do *cap*. Assim, supondo que as datas de *payoff* se verificam em t_1, t_2, \dots, t_n ($t_{n+1} = T$), R_k é igual à taxa de juro correspondente ao período entre t_k e t_{k+1} , o *payoff* em t_{k+1} é igual a

$$L(t_{k+1} - t_k) \max(R_k - R_K, 0) \quad (2.32)$$

Assim, o valor do *caplet* é dado por

$$L \delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - R_K N(d_2)] \quad (2.33)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln[F_k/R_K] + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} \quad (2.34)$$

$$d_2 = \frac{\ln[F_k/R_K] - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} \quad (2.35)$$

e F_k é a taxa *forward* para o intervalo de tempo entre t_k e t_{k+1} . O valor do *floorlet* correspondente é dado por

$$L \delta_k P(0, t_{k+1}) [R_K N(-d_2) - F_k N(-d_1)] \quad (2.36)$$

Swaptions europeias

Como já foi introduzido na secção 1.2.4, um *swaption* (ou opção de *swap*) consiste numa opção que permite ao seu detentor entrar num contrato *swap* de taxas de juro numa determinada data. Uma empresa pode utilizar uma opção deste tipo para se proteger

contra uma futura subida da taxa de juro variável. Obtém assim a garantia de não ter que pagar uma taxa superior a uma taxa fixa determinada no contrato.

Ao longo de toda a vida de uma *swaption* os *payoffs* dos *swaps* são calculados a partir da diferença entre a taxa fixa, denominada *swap rate*, e da taxa variável. Assim, num determinado instante t , este *payoff* é igual a

$$\frac{L}{m} \max(S_T - S_K, 0) \quad (2.37)$$

onde L representa o valor nocional (que não é transaccionado) e m é a frequência de capitalização ¹. S_T e S_K representam, neste caso, os valores da taxa variável e da taxa fixa em t respectivamente. Se os pagamentos se verificarem nas datas T_1, T_2, \dots (em anos), então, pelas equações 2.30 e 2.31, o valor do fluxo em T_i é igual a

$$\frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \quad (2.38)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln[s_0/s_K] + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} \quad (2.39)$$

$$d_2 = \frac{\ln[s_0/s_K] - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} \quad (2.40)$$

s_0 representa a *forward swap rate*. Esta pode ser entendida como a taxa a pagar num contrato *swap* que começa numa data futura.

Para obtermos o valor total da *swaption* basta somar os fluxos em todas as datas de pagamento:

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \quad (2.41)$$

Estes últimos resultados são importantes para a última parte deste trabalho onde são feitas comparações com valores obtidos por simulação numérica através da discretização do modelo de Hull-White (secção 2.4.4).

¹Número de vezes que existe um fluxo de dinheiro por ano durante n anos. (ver secção 1.2.1)

2.4 Modelos *short rate*

2.4.1 Introdução

Nesta secção são descritas e discutidas algumas abordagens alternativas, na valorização de opções de taxas de juro, em relação aos modelos descritos anteriormente. Estes assumem que esta ou outra variável subjacente seguem uma distribuição lognormal e podem ser usados em derivados como opções de obrigações europeias, opções de *swap* europeias, *caps* e *floors*. Contudo, pelo facto de não serem capazes de prever a evolução da taxa de juro no tempo ², não permitem a sua utilização em derivados como *swaps* americanas ou opções de obrigações do tipo *call*. Quando existem *payoffs* em determinadas datas no futuro, é necessária uma boa previsão dos respectivos valores das taxas de juro. Assim, em vez de se usar o valor esperado da taxa de juro como sendo o seu valor *forward* no cálculo dos *payoffs* e não assumindo uma taxa constante no desconto até ao presente, constroem-se modelos de *term structure* descrevendo a evolução da taxa *short* - modelos *short rate*. Estes modelos pretendem modelar a dinâmica da *term structure* fazendo com que seja consistente com os dados de mercado observados.

Estes modelos descrevem o movimento da taxa r ao longo do tempo considerando variações infinitesimais. Assim, a taxa *short*, r , é a taxa aplicada no intervalo de tempo infinitesimal no instante t . A modelação da evolução da taxa *short* não se traduz necessariamente na descrição da curva *yield*. Contudo, usando argumentos de não-arbitragem, prova-se que o valor esperado (num mundo sem risco), no instante t , de um derivado de taxas de juro que tem um *payoff* igual a f_T em T é

$$\hat{E} \left[e^{-\bar{r}(T-t)} f_T \right] \quad (2.42)$$

onde \hat{E} representa o valor esperado num mundo sem risco e \bar{r} é o valor médio de r entre t e T .

Define-se $P(t, T)$ como o preço de uma obrigação cupão-zero no instante t que tem

²Razão pela qual os derivados de taxas de juro são mais difíceis de valorizar em comparação com os derivados de acções

um *payoff* igual a 1 em T e assim podemos escrever, a partir da equação 2.42,

$$P(t, T) = \hat{E} \left[e^{-\bar{r}(T-t)} \right] \quad (2.43)$$

Relembrando o conceito de capitalização contínua introduzido no primeiro capítulo define-se $R(t, T)$ como a taxa de juro com capitalização contínua para o período entre t e T . Então,

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (2.44)$$

e

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \quad (2.45)$$

Substituindo da equação 2.42 ficamos com

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \hat{E} \left[e^{-\bar{r}(T-t)} \right] \quad ([7]) \quad (2.46)$$

Desta equação podemos concluir que, uma vez conhecido o processo seguido por r , podemos definir a curva de taxas de juro inicial (ou *initial term* e a sua evolução temporal.

Nesta secção serão introduzidos, em primeiro lugar, os modelos que apresentam um maior grau de tractabilidade analítica.

2.4.2 O modelo de Vasicek (modelo de equilíbrio)

No modelo de Vasicek ³, o processo livre de risco para r é

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (2.47)$$

É um modelo de equilíbrio de um factor⁴ que descreve a evolução das taxas de juro incorporando *mean reversion*. A taxa r tende a convergir para um valor b a uma taxa a . Mais detalhadamente, podemos dizer que, a longo prazo, a taxa r vai apresentar valores que tendem a aproximar-se de b a uma velocidade a . $\sigma dW(t)$ é um termo estocástico onde $W(t)$ é um processo de Wiener. Este modelo descreve um processo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck - inicialmente estudado para descrever o movimento de uma partícula num gás rarefeito.

³Matemático Checo nascido a 1942. Foi nomeado Engenheiro Financeiro do ano de 2004 pela IAFE/Sungard como reconhecimento do estudo da dinâmica da *yield curve*.

⁴Em modelos deste tipo só existe um factor de incerteza.

A equação diferencial estocástica 2.47 pode ser resolvida (ver [15]):

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{at} dW_t \quad (2.48)$$

Consequentemente podemos escrever

$$E[r_t] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \quad (2.49)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r_t] = b \quad (2.50)$$

Na figura 2.3 exemplificam-se dois processos deste tipo e é possível a comparação com processos sem componente estocástica.

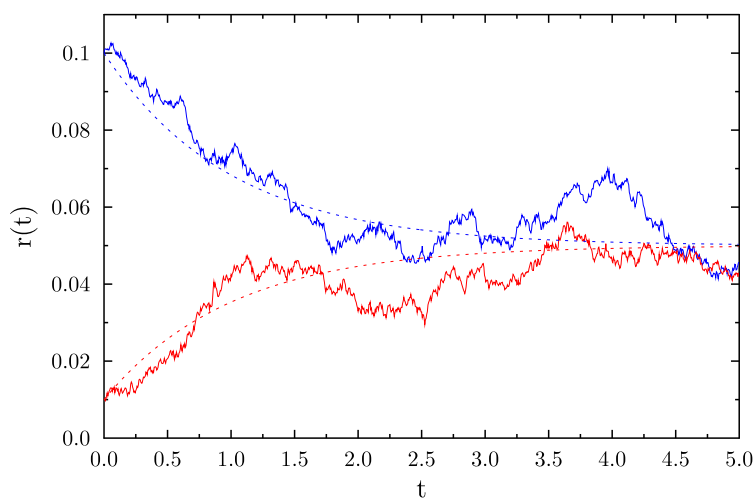


Figura 2.3: Dois processos de Ornstein-Uhlenbeck independentes. $r(0) = 0.01$ (a vermelho), $r(0) = 0.1$ (a azul), $b = 0.05$, $a = 0.05$ e $\sigma = 0.01$. A tracejado são os dois processos com $dW(t) = 0$.

Como é fácil de perceber, o factor *mean reversion* impede que os valores de r cresçam indefinidamente atingindo valores pouco realistas. Esta tendência é uma característica das taxas de juro que as distingue de outros activos e, ao contrário destes, tendem a

ser limitadas por valores máximos e mínimos e apresentam variações em torno de um valor. Apesar de ser uma boa modelação do comportamento das taxas de juro, o facto de admitir valores negativos de $r(t)$ é a principal desvantagem deste modelo. O modelo Hull-White (ver secção 2.4.4) surgiu como uma extensão ao modelo de Vasicek e proporciona um *fit* à *term structure* inicial, corrigindo o problema de o modelo de Vasicek assumir uma taxa de juro média constante.

2.4.3 O modelo Ho-Lee

O primeiro modelo de não-arbitragem foi proposto por Ho and Lee em 1986. O preço de obrigações foi determinado através da utilização de árvores binomiais tendo em conta o desvio padrão (σ) da *short rate* e o preço do risco de mercado da mesma. Um modelo de não-arbitragem distingue-se pelo facto de apresentar um ajuste à *term structure* inicial (é um *output* do modelo). Um modelo de equilíbrio tem a desvantagem de necessitar da *term structure* como *input*. No entanto, alguns modelos deste tipo podem ser adaptados a modelos de não-arbitragem incluindo uma função do tempo no factor de flutuação da *short rate*.

A equação

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \quad (2.51)$$

descreve a variação desta taxa. $\theta(t)$ é uma função que assegura que o modelo se adapta à curva de taxas de juro inicial descrevendo a flutuação ao longo de t :

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t \quad (2.52)$$

onde a derivada parcial representa o declive da curva *forward* em t .

Neste modelo existem soluções analíticas para opções europeias e obrigações de cupão-zero em termos da taxa *short* r e dos valores presentes das obrigações que por sua vez podem ser determinados usando a curva (presente) de taxas de juro. Assim, para o preço de obrigações de cupão-zero temos (ver [3])

$$P(T, s) = A(T, s)e^{-B(T, s)r(T)}, \quad P(t, s) : s \geq T \geq t \quad (2.53)$$

onde

$$B(T, s) = (s - T) \quad (2.54)$$

e

$$\ln A(T, s) = \ln \frac{P(t, s)}{P(t, 0)} + B(T, s) \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} - \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t) B(T, s)^2 \quad (2.55)$$

Opções europeias de obrigações

Neste modelo, as fórmulas modificadas de Black e Scholes permitem a valorização de opções europeias de obrigações:

$$c(t, T, s) = P(t, s)N(d_1) - KP(t, T)N(d_2) \quad (2.56)$$

$$p(t, T, s) = KP(t, s)N(-d_2) - P(t, T)N(-d_1) \quad (2.57)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(P(t, s)/KP(t, T))}{\sigma_P} + \frac{\sigma_P}{2} \quad (2.58)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_P \quad (2.59)$$

$$\sigma_P = \sigma(s - T)\sqrt{T - t} \quad (2.60)$$

Apesar de existir uma boa tractabilidade analítica no modelo Ho-Lee para opções europeias de obrigações é necessário desenvolver métodos numéricos que nos permitam obter o valor de opções exercício anterior à data de maturidade, como opções americanas.

2.4.4 O modelo Hull-White de um factor

O modelo de Hull e White é, hoje em dia, bastante popular. Não só por ser facilmente tratável analiticamente mas também por permitir um ajuste exacto da *term structure* inicial. Pode ser caracterizado como um modelo Ho-Lee com *mean reversion* ou também como um modelo de Vasicek com um factor de reversão dependente do tempo (como se pode ver comparando com as equações 2.47 e 2.51). A equação diferencial estocástica é a seguinte:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dt \quad (2.61)$$

Tal como no modelo Ho-Lee, a função $\theta(t)$ permite um ajuste à *term structure* inicial. Neste caso é dada por

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (2.62)$$

Normalmente o último termo desta equação é muito pequeno. Omitindo-o ficamos com

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + af(0, t) \quad (2.63)$$

que podemos substituir na equação 2.61 para obter

$$dr = \left[\frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + a(f(0, t) - r) \right] dt + \sigma dt \quad (2.64)$$

Isto mostra que r tende para seguir o declive $\frac{\partial f(0, t)}{\partial t}$ da curva *forward* inicial. Quando se desvia desta curva, tende a aproximar-se novamente a uma taxa a .

As soluções para preços de obrigações no modelo Hull-White são as seguintes:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (2.65)$$

onde

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (2.66)$$

e

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)F(0, t) - \frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT} - e^{-at})^2(e^{at} - 1) \quad (2.67)$$

2.4.5 Opções de obrigações

Como já vimos, é possível obter soluções analíticas para opções de obrigações cupão-zero com os modelos Vasicek, Ho-Lee e Hull-White.

$$LP(0, s)N(h) - KP(0, T)N(h - \sigma_P) \quad (2.68)$$

onde L representa o nocional da obrigação, K representa o *strike* e

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln \frac{LP(0, s)}{P(0, T)K} + \frac{\sigma_P}{2} \quad (2.69)$$

O preço de uma opção do tipo *put* é dado por

$$KP(0, T)N(-h + \sigma_P) - LP(0, s)N(-h) \quad (2.70)$$

Para os modelos de Vasicek e Hull-White temos que

$$\sigma_P = \frac{\sigma}{a} \left[1 - e^{-a(s-T)} \right] \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}} \quad (2.71)$$

Para o modelo Ho-Lee,

$$\sigma_P = \sigma(s - T)\sqrt{T} \quad (2.72)$$

Adicionalmente, podemos determinar o preço de *caps* e *floors* se considerarmos estes como portfolios de opções de obrigações cupão-zero. Assim, podemos utilizar as equações apresentadas em cima para este efeito.

2.5 LIBOR *market model* (LMM)

Segundo o LIBOR *market model* a valorização de derivados de taxas de juro é realizada utilizando apenas taxas *forward* LIBOR. Por exemplo, os retornos destes instrumentos financeiros são expressos em termos de taxas *forward* e estas são modeladas através de movimentos Brownianos geométricos.

As taxas *forward* LIBOR não são transaccionadas em mercados. Contudo, a teoria de arbitragem de valorização de derivados baseia-se na técnica de *hedging* utilizando activos como obrigações de taxas de juro. Assim, o LMM apresenta equações que descrevem o processo para preços de obrigações. A partir destes, são derivadas equações para as taxas *forward*. A especificação da volatilidade instantânea para as taxas *forward* permite a obtenção de condições para as equações de preços de obrigações. A dinâmica resultante constitui o fundamento para o LIBOR *market model*. Medições específicas deste modelo são posteriormente calculadas e a teoria de arbitragem diz-nos que os preços dos derivados são dados pelo valor esperado sob uma medida LIBOR particular do *payoff* do derivado. De uma forma mais informal podemos dizer que o preço de um derivado corresponde ao valor esperado do *payoff* que é expresso em termos de taxas *forward* LIBOR.

Devido às suas características não-markovianas é necessária a utilização de métodos de Monte-Carlo e, assim, uma limitação é a impossibilidade de valorização de opções americanas.

Capítulo 3

Métodos numéricos

3.1 Árvores de taxas de juro

Como foi possível perceber na análise e descrição dos modelos referidos nas secções anteriores, só existem soluções analíticas para alguns tipos de derivados de taxas de juro como opções de obrigações cupão-zero, *caps* e *floors*. Para a valorização de derivados como opções de swap (*swaptions*) é necessário recorrer a técnicas de discretização.

A construção de árvores trinomiais revela-se uma ferramenta bastante eficiente na representação da evolução de variáveis como taxas de juro. Facilmente conseguem modelar características próprias destas variáveis como a taxa *mean reversion*. É uma forma de representar um processo estocástico da *short rate* r ¹ onde se assume que a taxa R no instante $i\Delta t$ segue o mesmo processo da *short rate*.

Para se conseguir estudar a valorização de derivados de taxas de juro utilizando este método de discretização é necessário adoptar um procedimento que permita a construção de árvores trinomiais representativas do respectivo modelo adoptado. O adoptado neste trabalho foi o sugerido por Hull e White [6] e será descrito em pormenor. A figura 3.1 mostra o exemplo de uma árvore trinomial com ramificação normal. Cada árvore é constituída por nós que representam as possíveis posições de R ao longo do tempo. Como t é discreto iremos ter n passos em cada árvore distanciados entre si de uma quantidade

¹De forma semelhante, as árvores binomiais são bastante utilizadas na representação discreta de processos estocásticos de preços de *stock*. Uma árvore binomial, com ramificações para apenas dois estados posteriores, não é suficiente no caso deste trabalho. Isto deve-se ao facto de ser introduzido um grau de liberdade extra pelo parametro a (*mean reversion*).

Δt . Em cada instante $i\Delta t$ existe também um distanciamento Δx entre os nós. Estes representam-se pelo par de índices (i, j) .

Como sugere a figura 3.1, num dado instante o valor da taxa de juro $R(i, j)$ pode aumentar com probabilidade p_u , diminuir com probabilidade p_d ou manter-se com probabilidade p_m .

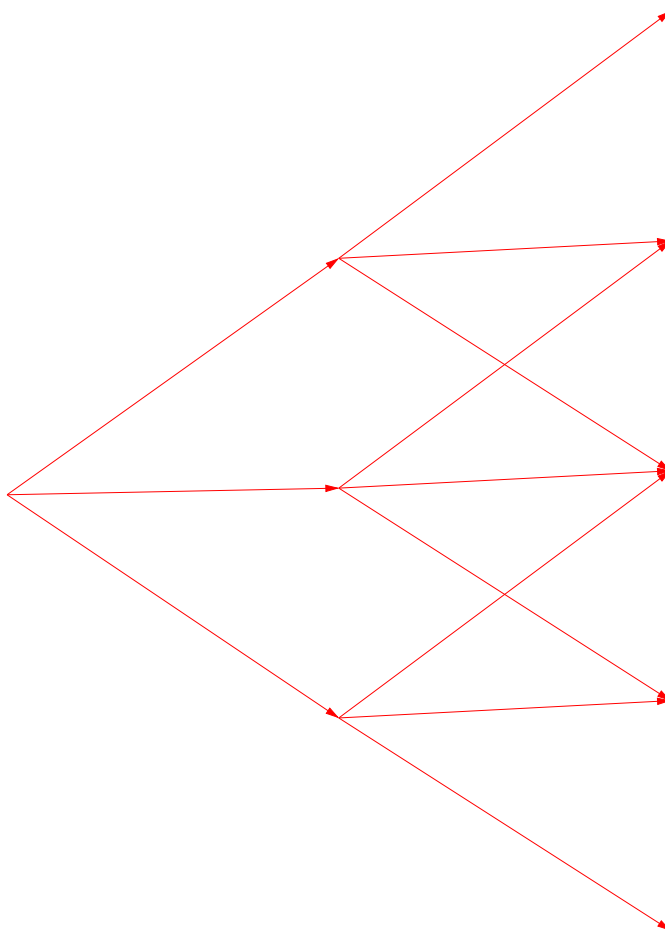


Figura 3.1: Árvore trinomial com ramificação normal.

3.1.1 Procedimento de construção de árvores

Neste trabalho foi utilizado, em primeira abordagem para Δt constante, o procedimento sugerido por Hull e White. Este é composto por duas fases. A primeira baseia-se na

construção da árvore trinomial criando todos os nós a partir de todas as probabilidades de transição e calculando todos os espaçamentos Δx em cada instante $i\Delta t$.

Recordando a equação que descreve o modelo de Hull-White,

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \quad (3.1)$$

e assumindo que R segue o mesmo processo de r , podemos escrever²

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz \quad (3.2)$$

Primeira fase

A primeira fase da construção de uma árvore trinomial para valorização de derivados de taxas de juro consiste em considerar um processo do tipo

$$dR_1 = -aR_1dt + \sigma dz \quad (3.3)$$

ou seja, $\theta(t) = 0$ (não existe *fit à term structure* inicial). Neste processo considera-se $R_1(0) = 0$ e calculam-se os percursos possíveis para esta nova variável R_1 obtendo os valores de p_u , p_m , p_d e $i\Delta r$.

É necessário que as probabilidades satisfaçam a equação

$$\begin{aligned} E[R((i+1)\Delta t)|R(i\Delta t) = j\Delta R] &= j\Delta R - aj\Delta R\Delta t \\ &= p_u((k+1)\Delta R) + p_m(k\Delta R) + p_d((k-1)\Delta R) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Var[R((i+1)\Delta t)|R(i\Delta t)] &= \sigma^2\Delta t \\ &= p_u[(k+1)\Delta R - (1-a\Delta t)j\Delta R]^2 + \\ &\quad p_d[(k-1)\Delta R - (1-a\Delta t)j\Delta R]^2 + \\ &\quad p_m[k\Delta R - (1-a\Delta t)j\Delta R]^2 \end{aligned}$$

²Isto sugere que, no limite em que temos $\Delta t \rightarrow 0$ os preços obtidos através de árvores trinomiais deverão ser iguais aos obtidos pelas soluções analíticas disponíveis.

onde $k = j - 1$ para as ramificações do tipo decrescente, $k = j$ para as do tipo normal e $k = j + 1$ para as do tipo crescente (ver figura 3.2).

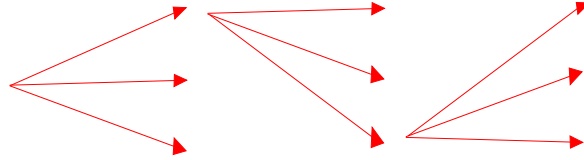


Figura 3.2: ramificações do tipo normal, decrescente e crescente.

Com a equação

$$p_u + p_m + p_d = 1 \quad (3.4)$$

ficamos com três equações e três incógnitas. Resolvendo o sistema e fazendo $\rho = \frac{\Delta R^2}{\sigma^2 \Delta t}$ obtemos as soluções para os três tipos de ramificação. Para o tipo normal obtemos

$$p_u = \frac{1 + aj\Delta t(-1 + aj\Delta t)\rho}{2\rho} \quad (3.5)$$

$$p_m = 1 - a^2 j^2 \Delta t^2 - \frac{1}{\rho} \quad (3.6)$$

$$p_d = \frac{1 + aj\Delta t(1 + aj\Delta t)\rho}{2\rho} \quad (3.7)$$

Para o tipo crescente obtemos

$$p_u = \frac{1 + aj\Delta t(1 + aj\Delta t)\rho}{2\rho} \quad (3.8)$$

$$p_m = -aj\Delta t(2 + aj\Delta t) - \frac{1}{\rho} \quad (3.9)$$

$$p_d = \frac{1 + (1 + aj\Delta t)(2 + aj\Delta t)\rho}{2\rho} \quad (3.10)$$

Para o tipo decrescente obtemos

$$p_u = \frac{1}{2} \left(2 + aj\Delta t(-3 + aj\Delta t) + \frac{1}{\rho} \right) \quad (3.11)$$

$$p_m = \frac{-1 + aj\Delta t(2 - aj\Delta t)\rho}{\rho} \quad (3.12)$$

$$p_d = \frac{\sigma^2 + aj\Delta t(aj\Delta t R^2 - \rho\sigma^2)}{2\rho\sigma^2} \quad (3.13)$$

Em qualquer um dos três casos, as probabilidades têm que ser sempre positivas. Assim, impondo as condições $p_u > 0$, $p_m > 0$, $p_d > 0$, $\Delta t > 0$, $\sigma > 0$ e $a > 0$ obtemos os limites de j para os três tipos de ramificação. Para a ramificação normal,

$$-\frac{1}{a\Delta t}\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}} < j < \frac{1}{a\Delta t}\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}} \quad (3.14)$$

para a crescente,

$$\frac{-1 - \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} < j < \frac{-1 + \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} \quad (3.15)$$

e para a decrescente,

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} < j < \frac{1 + \sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} \quad (3.16)$$

Como é fácil de perceber, quanto maior for o valor de j menor é a probabilidade de a taxa R chegar ao nó (i, j) . Isto deve-se à presença do factor *mean reversion* referido anteriormente. Nestas inequações podemos concluir também que ρ tem que ser maior do que 1.

Hull e White sugerem a utilização de $\rho = 3$ por ser um valor que satisfaz a condição de estabilidade e contribui para a minimização dos erros (ver [7]). Neste caso, substituindo nas inequações em cima ficamos com:

$$-\frac{1}{a\Delta t}\sqrt{\frac{2}{3}} < j < \frac{1}{a\Delta t}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (3.17)$$

para a crescente,

$$\frac{-1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} < j < \frac{-1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} \quad (3.18)$$

e para a decrescente,

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} < j < \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} \quad (3.19)$$

Os limites para j são então dados por

$$\frac{-1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} < j < \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} \quad (3.20)$$

ou

$$|j| < \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t} \quad (3.21)$$

Na árvore trinomial a utilizar, j assume apenas valores inteiros e vamos aplicar a ramificação do tipo decrescente assim que atingimos um valor de j igual ao maior valor inteiro inferior a $j_{max} = \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{a\Delta t}$. Analogamente, aplicamos uma ramificação crescente quando j é igual ao maior inteiro inferior a $-j_{max}$.

Exemplo (primeira fase)

Como forma de finalizar a descrição da primeira fase da construção de uma árvore trinomial apresenta-se, de seguida, um exemplo simples onde é possível ver a representação gráfica dos três tipos de ramificações. Considera-se um período de 3 anos com $\Delta t = 1$, $\sigma = 0.02$ e $a = 0.05$.

n	i	j	p_u	p_m	p_d	$R_1(\%)$
0	0	0	0,166667	0,666667	0,166667	0,0000
1	1	1	0,142917	0,664167	0,192917	3,4641
2	1	0	0,166667	0,666667	0,166667	0,0000
3	1	-1	0,192917	0,664167	0,142917	-3,4641
4	2	2	0,121667	0,656667	0,221667	6,9282
5	2	1	0,142910	0,664167	0,192917	3,4641
6	2	0	0,166667	0,666667	0,166667	0,0000
7	2	-1	0,192917	0,664167	0,142917	-3,4641
8	2	-2	0,221667	0,656667	0,121667	-6,9282

Tabela 3.1: Valores de R_1 , p_u , p_m e p_d para os nós da árvore da figura 3.3.

Analisando os valores apresentados na tabela 3.1 é possível verificar que existe uma simetria em torno dos nós com $R_1 = 0$ como seria de esperar, tanto nos valores das probabilidades como nos valores de R_1 . Confirma-se também que, em cada nó temos satisfeita a equação 3.4.

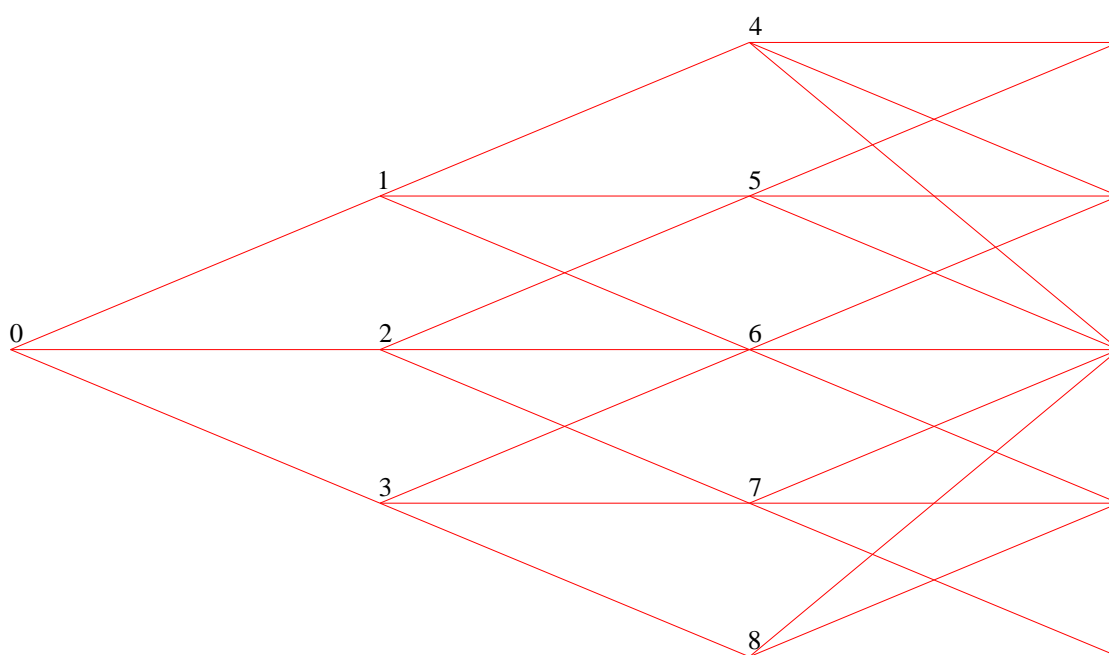


Figura 3.3: Primeira fase de construção de uma árvore trinomial com três passos. $\Delta t = 1$, $\sigma = 0.02$ e $a = 0.05$. Numeração dos 8 primeiros nós.

Segunda Fase

A segunda fase da construção de uma árvore trinomial utilizando este método proposto por Hull e White tem como principal objectivo fazer uma adaptação à curva inicial das taxas de juro. Assim, é necessário incluir a função $\theta(t)$ e alterar as posições dos nós, de R_1 para R_2 , somando a R_1 uma quantidade $\alpha(t)$ que depende de $\theta(t)$:

$$dR_2 = [\theta(t) - aR_2]dt + \sigma dz \quad (3.22)$$

$$R_2(t) = R_1(t) + \alpha(t) \quad (3.23)$$

É possível determinar a solução analítica para $\alpha(t)$. Basta considerar

$$dR_1 = -aR_1 dt + \sigma dz \quad (3.24)$$

e

$$dR_2 = [\theta(t) - aR_2]dt + \sigma dz \quad (3.25)$$

e fazer

$$\begin{aligned} R_1 &= [\theta(t) - aR_2]dt + \sigma dz - (-aR_1dt + \sigma dz) \\ &= [\theta(t) - a(R_2 - R_1)]dt \\ &= [\theta(t) - a\alpha(t)]dt \end{aligned} \quad (3.26)$$

ou seja

$$d\alpha(t) = [\theta(t) - a\alpha(t)]dt \quad (3.27)$$

Se considerarmos que r e R seguem exactamente o mesmo processo e se fizermos mesmo $r = R$ então temos como solução,

$$\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \quad (3.28)$$

Como, nesta fase, se está a usar uma discretização do modelo, consideram-se apenas os valores discretos de $\alpha(t)$ ($\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$) e tem-se

$$R_{2,i} = R_{1,i} + \alpha_i \quad (3.29)$$

que têm que ser calculados iterativamente. O processo consiste em reposicionar os nós da árvore de forma a que, com esta, seja possível calcular correctamente os preços de obrigações. Assim, define-se $Q_{i,j}$ como o preço de um instrumento financeiro negociável que dá um retorno de 1 (em unidades monetárias) se o nó (i, j) for atingido e de 0 no caso contrário. Assim, por definição, $Q_{0,0} = 1$ e α_0 será igual à taxa de juro a aplicar ao primeiro período Δt . Defina-se $R_0(i\Delta t)$ como a valor da taxa de juro correspondente ao instante $i\Delta t$ (retirado da curva inicial de taxas de juro ou *yield curve inicial*). Então temos

$$\alpha_0 = R_{1,(0,0)} + R_0(0) \quad (3.30)$$

No seguimento do exemplo anterior, se considerarmos as taxas de juro da tabela 3.2 obtemos $R_{2(0,0)} = \alpha_0 = 0,0170$.

Continuando o processo iterativo e conhecendo o valor de α_0 é possível determinar os valores de Q_{11} , Q_{10} e Q_{1-1} . Para o nó $(1, 1)$ Q_{11} é determinado conhecendo a probabilidade de este ser atingido. (tabela 3.1). O mesmo é feito para os nós $(1, 0)$ e $(1, -1)$:

$$Q_{11} = 0.1667e^{0.0170} = 0.16389 \quad (3.31)$$

Tabela 3.2: Curva inicial de taxas de juro.

$t(\text{anos})$	R_0
0	0,0170
1	0,0246
2	0,0344
3	0,0382

$$Q_{10} = 0.6667.e^{0.0170} = 0.65546 \quad (3.32)$$

$$Q_{10} = 0.1667e^{0.0170} = 0.16389 \quad (3.33)$$

O próximo passo consiste em calcular α_1 . Este deve ser um valor que permita calcular correctamente o preço de uma obrigação cupão-zero com maturidade de dois anos ($2\Delta t$). No nó (1,1) o preço desta obrigação é igual a $e^{-(\alpha_1+\Delta R)} = e^{-(\alpha_1+0.034641)}$ ($\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t} = 0.034641$). Analogamente, para os nós (1,0) e (1-1) os valores desta obrigação são iguais a $e^{-(\alpha_1)}$ e $e^{-(\alpha_1-0.034641)}$ respectivamente. Assim, no primeiro nó da árvore (em $t = 0$) esta obrigação vale

$$Q_{11}e^{-(\alpha_1+0.034641)} + Q_{10}e^{-\alpha_1} + Q_{1-1}e^{-(\alpha_1-0.034641)} \quad (3.34)$$

Através dos dados da tabela 3.2 sabemos que, da *term structure* inicial, o valor desta obrigação deveria ser igual a $e^{-0.0344 \times 2} = 0.933513$. Assim, como α_1 tem que permitir a obtenção deste mesmo valor através da árvore pode ser escrita a equação

$$0.16389e^{-(\alpha_1+0.034641)} + 0.65546e^{-\alpha_1} + 0.16389e^{-(\alpha_1-0.034641)} = 0.93351 \quad (3.35)$$

Resolvendo esta equação em ordem a α_1 ficamos com

$$\alpha_1 = \ln \left[\frac{0.16389e^{-0.034641} + 0.65546 + 0.16389e^{0.034641}}{0.93351} \right] = 0.05210 \quad (3.36)$$

Assim, os valores R_2 dos nós 1, 2 e 3 da figura 3.3 são obtidos fazendo

$$R_2 = R_1 + 0.05210 \quad (3.37)$$

Usando os valores de Q para os nós em $t = 1$ foram calculados os valores de α_1 . Fazendo o mesmo para todos os instantes de t ao longo da árvore, ou seja, aproveitando os valores de $Q(t - 1)$ para calcular $\alpha(t)$ obtemos uma nova árvore de valores R_2 que permite o cálculo de obrigações cupão-zero. Na figura 3.4 podemos ver a árvore da figura 3.3 com as taxas R_2 substituídas pelas taxas R_1 . Na tabela 3.3 encontram-se algumas propriedades dos nós desta última árvore: valores de R_1 , R_2 , Q_{ij} e probabilidades de transição.

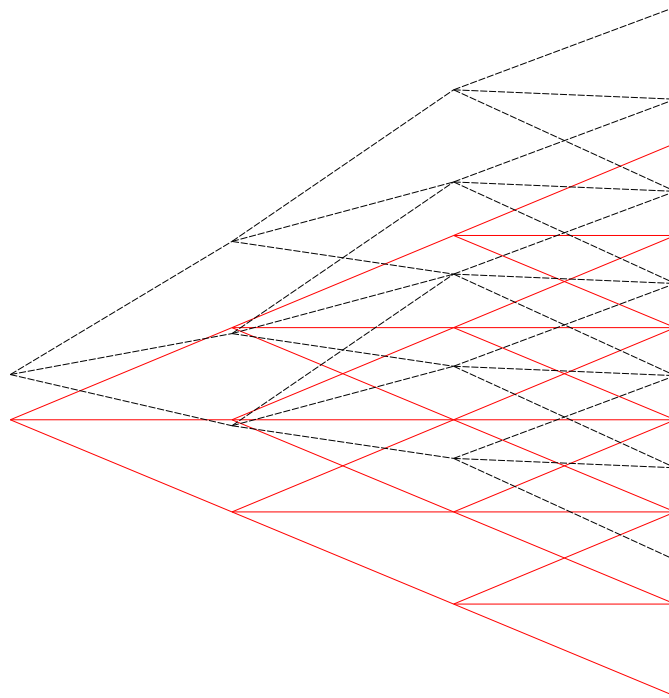


Figura 3.4: Segunda fase de construção de uma árvore trinomial com três passos (árvore de R_2 a cinzento e árvore de R_1 a vermelho). $\Delta t = 1$, $\sigma = 0.02$ e $a = 0.05$.

n	i	j	p_u	p_m	p_d	$R_1(\%)$	$R_2(\%)$	Q
0	0	0	0,1666670	0,6666667	0,1666667	0,0000	0,017000	1,000000
1	1	1	0,1429170	0,664167	0,192917	3,4641	0,067041	0,163857
2	1	0	0,1666670	0,6666667	0,1666667	0,0000	0,032400	0,655429
3	1	-1	0,1929170	0,664167	0,142917	-3,4641	-0,002241	0,163857
4	2	2	0,1216670	0,656667	0,221667	6,9282	0,124043	0,021899
5	2	1	0,1429100	0,664167	0,192917	3,4641	0,089402	0,207527
6	2	0	0,1666670	0,6666667	0,1666667	0,0000	0,054761	0,484265
7	2	-1	0,1929170	0,664167	0,142917	-3,4641	0,020120	0,214828
8	2	-2	0,2216670	0,656667	0,121667	-6,9282	-0,014522	0,023471

Tabela 3.3: Valores de R_1 , R_2 , p_u , p_m , p_d e Q para os nós da árvore da figura 3.4.

3.2 Árvores trinomiais com Δt variável

Na descrição do processo de construção de árvores trinomiais da secção anterior é referido o facto de Δt ser constante e igual a 1. O mesmo processo é válido para $\Delta t \neq 1$ mas não para os casos em que Δt varia ao longo da árvore. Este método pode ser aproveitado e estendido para o caso geral em que temos σ , a e Δt variáveis no tempo. Quando passamos a ter estes parâmetros como funções do tempo obtemos a possibilidade de conseguir um melhor *fit* aos instrumentos financeiros que existem no mercado. Frequentemente é conveniente que os nós coincidam exactamente com determinadas datas (e.g. datas de *payoff* e datas de maturidade). Contudo, a curva de volatilidade obtida pelo modelo utilizado pode não traduzir da melhor forma a volatilidade apresentada pelo mercado no futuro.

Na figura 3.5 podemos ver um exemplo de uma árvore trinomial com Δt variável consistente com os valores da tabela 3.4

Tabela 3.4: Curva inicial de taxas de juro para Δt variável.

$t(\text{anos})$	R_0
0	0,0170
0,5	0,0200
2	0,0344
3	0,0382

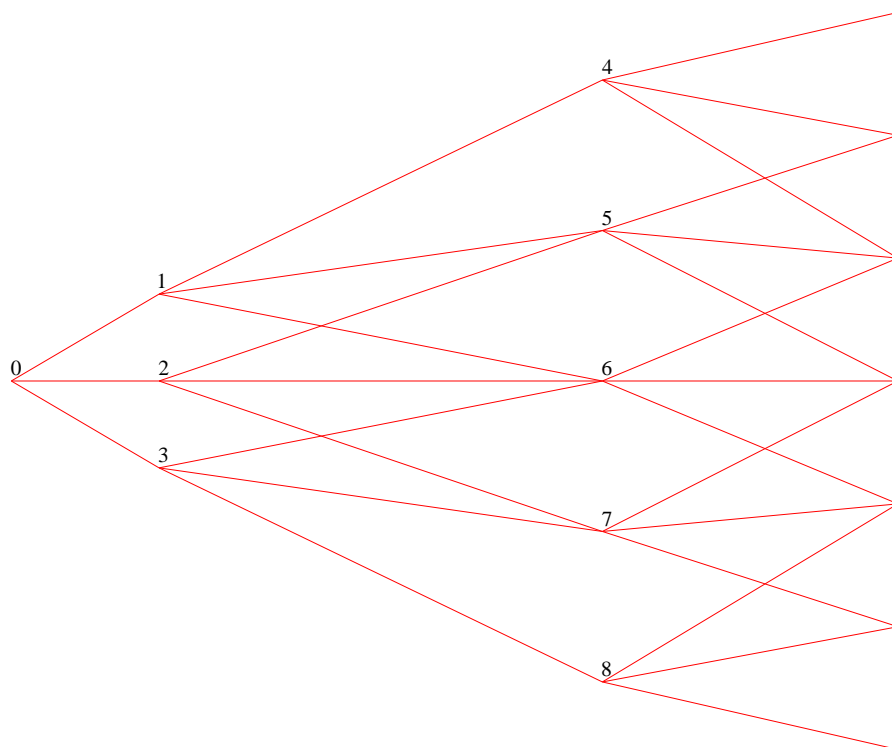


Figura 3.5: Exemplo de uma árvore trinomial com Δt variável.

3.3 Comparação com soluções analíticas

3.3.1 Obrigações (Δt constante)

Como existem soluções analíticas para os valores de obrigações e opções europeias de taxas de juro, podemos utiliza-las para verificar se uma determinada árvore trinomial foi bem construída. Intuitivamente percebemos que quando $\Delta t \rightarrow 0$ os valores obtidos pela árvore devem aproximar-se dos analíticos. Em [7] podemos ver que

$$P(t, T) = \hat{A}(t, T)e^{-\hat{B}(t, T)R} \quad (3.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \ln \hat{A}(t, T) &= \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - \frac{B(t, T)}{B(t, t + \Delta t)} \ln \frac{P(0, t + \Delta t)}{P(0, t)} \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B(t, T) [B(t, T) - B(t, t + \Delta t)] \end{aligned}$$

e $\hat{B}(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, t+\Delta t)} \Delta t$. No exemplo que se segue é calculado o valor de $P(0, 3)$ através de uma árvore trinomial com as seguintes características:

- $\sigma = 0.1$
- $a = 0.5$
- $R_0(t) = 0.01$ (constante)
- $T = 3$ (anos)

Pela equação 3.38 temos simplesmente $P(0, 3) = e^{-0.01 \times 3}$.

A tabela 3.5 mostra a comparação entre os valores obtidos através da árvore trinomial com as soluções analíticas. No gráfico da figura 3.6 mostra-se a convergência dos valores obtidos quando se aumenta o número de passos temporais (quando se diminui Δt).

passos	árvore	analítico	erro relativo (%)
3	0,980199	0,9704460	-1,00500
6	0,975310	0,9704460	-0,50121
12	0,972875	0,9704460	-0,25030
24	0,971659	0,9704460	-0,12499
48	0,971052	0,9704460	-0,06245
96	0,970749	0,9704460	-0,03122
192	0,970597	0,9704460	-0,01556
384	0,970521	0,9704460	-0,00773
500	0,970504	0,9704460	-0,00598
768	0,970483	0,9704460	-0,00381
1532	0,970450	0,9704460	-0,00041

Tabela 3.5: Comparação de *discount bonds*: árvore trinomial vs. soluções analíticas.

3.3.2 Obrigações (Δt variável)

Podemos fazer o mesmo teste para uma árvore com Δt variável. Da mesma forma, aumenta-se o número de passos e compara-se os valores obtidos com as soluções analíticas. É de esperar que, quanto maior for o número de passos, menor será a diferença entre os valores absolutos de Δt ao longo da árvore. No limite tem-se um problema onde $\frac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i} = 1$. Assim, é esperada uma convergência, tal como no exemplo anterior.

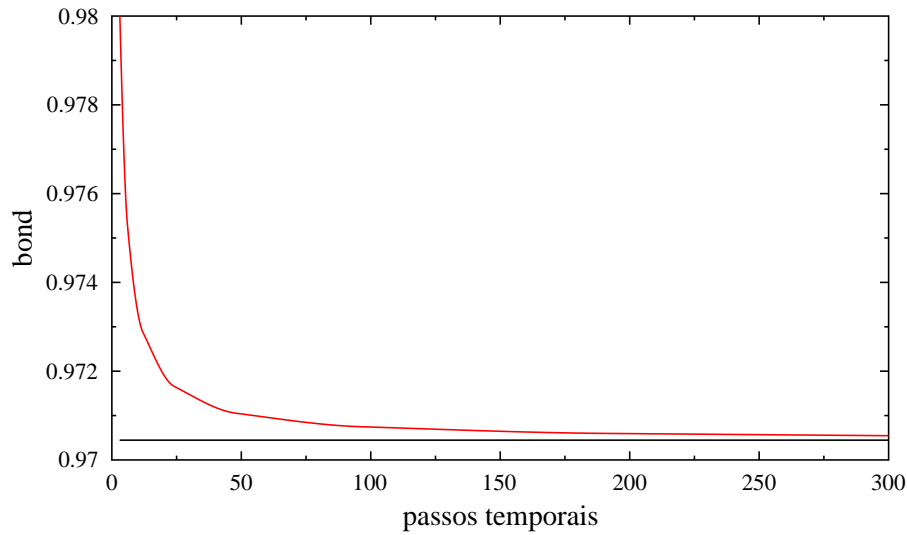


Figura 3.6: Convergência dos valores de *bonds* obtidos através da árvore trinomial.

A tabela 3.6 e o gráfico da figura 3.7 mostram os resultados obtidos.

passos	árvore	analítico	erro relativo (%)
9	0,979514	0,9704460	0,93442
18	0,974285	0,9704460	0,39559
36	0,972240	0,9704460	0,18486
72	0,971315	0,9704460	0,08955
144	0,970874	0,9704460	0,04410
1000	0,970500	0,9704460	0,00556

Tabela 3.6: Comparação de *discount bonds* com Δt variável: árvore trinomial vs. soluções analíticas.

No exemplo apresentado a variação de Δt foi do tipo $\Delta t_p = \Delta t_{p-1}/2$ (onde p representa o índice do passo temporal). Ou seja, diminuiu-se o passo temporal por um factor de 2 ao longo da árvore até à maturidade T .

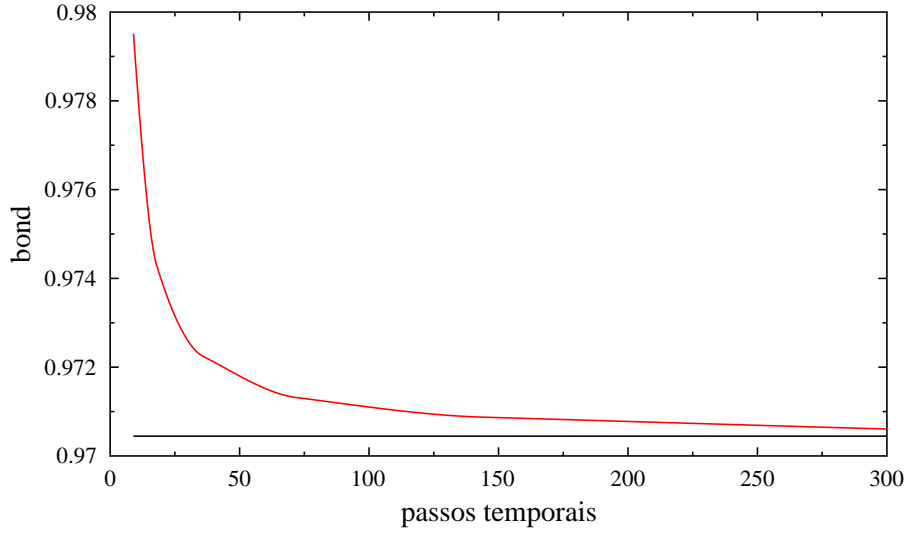


Figura 3.7: Convergência dos valores de *bonds* obtidos através da árvore trinomial com Δt variável.

3.3.3 Opções Europeias

Também podemos tirar partido das soluções analíticas para opções europeias de *bonds* com o objectivo de testar a convergência dos resultados. Os preços de opções *call* e *put* são dados por

$$c(t, T, s) = P(t, s)N(d_1) - KP(t, T)N(d_2) \quad (3.39)$$

$$p(t, T, s) = KP(t, T)N(-d_2) - P(t, s)N(-d_1) \quad (3.40)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(P(t, s)/KP(t, T))}{\sigma_P} + \frac{\sigma_P}{2} \quad (3.41)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_P \quad (3.42)$$

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma_P^2}{2a^3}(1 - e^{-2a(T-t)})(1 - e^{-a(s-T)})^2 \quad (3.43)$$

Tal como nos exemplos anteriores, observamos a relação entre os resultados obtidos através da árvore e os resultados analíticos:

Tabela 3.7: Comparação de valores de opções de *discount bonds*: árvore trinomial vs. soluções analíticas.

passos	árvore	analítico	erro relativo (%)
5	0,00616816	0,0064492	-4,35775
25	0,00671858	0,0064492	4,17695
50	0,00664322	0,0064492	3,00844
250	0,00642505	0,0064492	-0,37447
500	0,00646669	0,0064492	0,27120

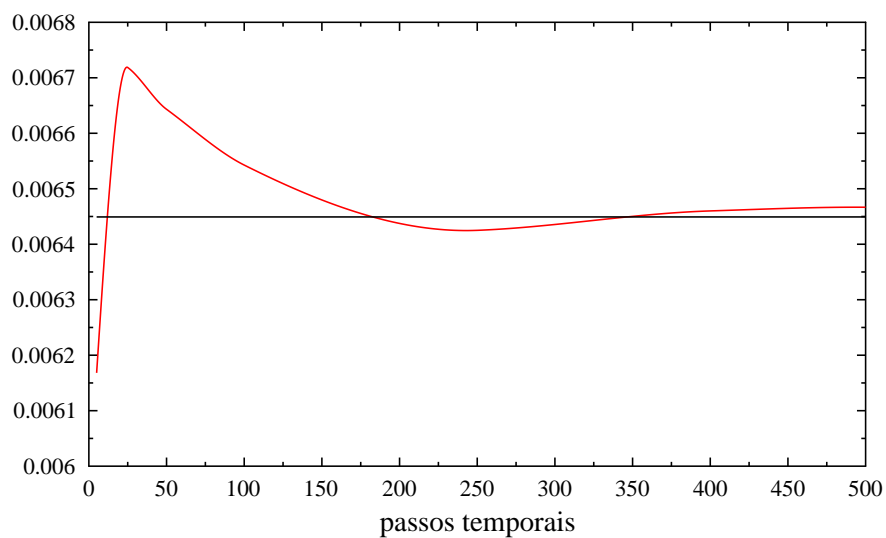


Figura 3.8: Convergência dos valores de opções de *bonds* obtidos através da árvore trinomial.

Capítulo 4

Calibração do modelo

O processo de calibração do modelo Hull-White para a valorização de derivativos de taxas de juro consiste em encontrar as funções $\sigma(t)$ e $a(t)$ que caracterizam o mercado, bem como minimizar as diferenças entre os preços existentes no mercado e os obtidos através dos métodos numéricos. Todo o processo de construção de árvores trinomiais é feito assumindo que σ e a são constantes ao longo do tempo. Este permite a obtenção de árvores que estão de acordo com a *term structure* inicial. No entanto, não é suficiente para conseguirmos a valorização correcta deste tipo de derivativos. Como estes dependem fortemente da volatilidade (variável no tempo) do mercado é necessário escolhermos correctamente estes parâmetros.

Construída uma árvore trinomial para um determinado conjunto de parâmetros $\sigma(t_0, t_1, t_2, \dots)$ e $a(t_0, t_1, t_2, \dots)$ é necessário ajustá-la a uma árvore que nos permita calcular de forma correcta os instrumentos financeiros deste tipo existentes no mercado. Este ajuste consiste em encontrar os $\sigma_i(t_i)$ e $a_i(t_i)$ do modelo utilizado. Se conseguirmos construir uma árvore trinomial que permita obter os mesmos valores destes instrumentos significa, em princípio, que os $\sigma_i(t_i)$ e $a_i(t_i)$ usados são os que traduzem o comportamento do mercado. Assim, conseguimos determinar o preço de outros derivativos do mesmo tipo através da mesma árvore.

O número e o tipo de instrumentos financeiros ¹ que conseguimos obter do mercado influencia a qualidade da calibração. Se tivermos toda a informação acerca uma opção de *swap*, por exemplo, conseguimos, através de um simples algoritmo de optimização, encontrar os parâmetros do modelo que nos permitem calcular, através de uma árvore trinomial, o preço correcto desta opção (exemplificado na secção seguinte). Nada nos garante, no entanto, que com esta árvore conseguimos obter o preço correcto de outras *swaptions* com diferentes parâmetros (diferentes taxas *swap*, maturidades, etc.). É útil então termos a informação de vários tipos de derivados de taxas de juro com diferentes parâmetros. Assim, quanto maior o número de derivados que tivermos disponíveis, mais informação conseguirmos obter acerca do comportamento do mercado no horizonte temporal que estamos a considerar e, conseqüentemente, maior será o número de instrumentos financeiros que a árvore consegue valorizar correctamente aumentando a qualidade da calibração.

O método de optimização utilizado neste trabalho, *Simulated Annealing*, para a calibração do modelo implementado será descrito na secção 4.1. É utilizado em problemas de matemática aplicada com o objectivo de obter uma boa aproximação a um mínimo global de uma dada função discreta. É especialmente útil quando se tem um espaço de configurações muito grande. Neste caso particular, o objectivo é encontrar o mínimo de uma função do tipo

$$\sqrt{\sum(V_i - U_i)^2} \quad (4.1)$$

onde V representa o preço do instrumento financeiro obtido através do modelo e U o preço do mesmo instrumento (com os mesmos parâmetros) do mercado. Assim, temos uma calibração óptima quando esta função se anula. Neste caso temos também os parâmetros do modelo (σ e a) que melhor traduzem o comportamento do mercado.

¹Neste contexto, estes instrumentos financeiros são utilizados como instrumentos de calibração do modelo.

4.1 *Simulated Annealing*

4.1.1 Introdução

Simulated Annealing é uma técnica que explora o processo de arrefecimento (*annealing* de um metal até atingir uma estrutura cristalina. Pode ser usada como método de otimização global, procurando a configuração de energia mínima de um sistema.

O desenvolvimento desta técnica foi iniciado em 1983 com o objectivo de lidar com problemas não-lineares e foi descrito por S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt e M. P. Vecchi no mesmo ano e por V. Cerný em 1985. Foi uma adaptação do algoritmo de Metropolis-Hastings introduzido por N. Metropolis em 1953 ².

Em física da matéria condensada, *annealing* denomina um processo físico no qual um sólido é sujeito a um “banho quente” no qual é aquecido até uma temperatura máxima à qual todas as partículas se encontram numa fase líquida. Em seguida, este sólido é arrefecido lentamente através da diminuição da temperatura deste “banho quente”. Desta forma (se a temperatura máxima for suficientemente elevada e se o arrefecimento for suficientemente lento) todas as partículas têm a possibilidade de procurar a configuração de energia mínima para cada temperatura (equilíbrio térmico). Esta possibilidade é caracterizada por uma probabilidade dada pela distribuição de *Boltzmann*:

$$P = \frac{1}{Z(T)} e^{-\frac{E}{k_B T}} \quad (4.2)$$

onde $Z(T)$ representa um factor de normalização que depende da temperatura T e k_B é a constante de *Boltzmann*. O factor $e^{-\frac{E}{k_B T}}$ é conhecido como o factor de *Boltzmann*. É fácil de perceber que com a diminuição da temperatura a distribuição de *Boltzmann* concentra-se nos estados com menor energia. Contudo, se o arrefecimento for muito rápido o material pode não conseguir atingir a configuração de energia mínima para cada temperatura e, como consequência, podem aparecer defeitos e estruturas amorfas são formadas.

²o método de Metropolis é um método de Monte Carlo usado para gerar uma amostragem de estados de um sistema termodinâmico.

Metropolis propôs um método de Monte Carlo que se traduz no seguinte. Partindo de uma configuração do sólido (posição das partículas), é gerada uma perturbação que consiste em aplicar uma alteração na posição de uma partícula (escolhida aleatoriamente). A posição é alterada em um valor aleatório. De seguida é calculada a variação de energia, ΔE , entre o estado final e o estado anterior à alteração na configuração. Se ΔE for negativo, ou seja, se a alteração resultar num estado de menor energia para o sólido, então o processo continua aceitando a alteração. Se ΔE for maior ou igual a zero (sólido com menor energia) então a alteração é aceite com probabilidade $e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$ - **critério de Metropolis**. Assim, para um número suficiente de perturbações, o sistema acabará por atingir o equilíbrio térmico, ou seja, a distribuição de probabilidades dos estados aproxima-se da distribuição de *Boltzmann*.

O método de *Simulated Annealing* pode ser visto como uma série de algoritmos de Metropolis aplicando uma variação na temperatura entre cada um. Pode ser descrito da seguinte forma. Inicialmente, consideramos o parâmetro de controlo (temperatura) com um valor elevado e aplicamos um método iterativo no qual uma configuração i dá lugar a uma nova configuração j escolhendo, aleatoriamente, um elemento da vizinhança de i - perturbação do algoritmo de Metropolis.

Seja $\Delta T_{ij} = T(j) - T(i)$, então a probabilidade de termos a configuração j como a nova configuração é igual a 1, se $\Delta T_{ij} \leq 0$, e $e^{-\frac{\Delta T_{ij}}{k_B T}}$ se $\Delta T_{ij} \geq 0$. Assim, existe uma probabilidade não nula de o sistema não passar a ter uma configuração com menor “energia”. O processo é continuado até ser atingido o equilíbrio, ou seja, até a distribuição de probabilidades do sistema se aproximar da distribuição de Boltzmann, que pode ser escrita como

$$P_i = \frac{1}{Q(c)} e^{-\frac{C(i)}{c}} \quad (4.3)$$

onde escolhemos $Q(c)$ como sendo uma constante de normalização que depende do parâmetro de controlo (c)³.

³Por razões de simplicidade, este parâmetro será denominado de temperatura, T .

O sistema é então “arrefecido” gradualmente e o algoritmo é terminado quando se atinge uma temperatura suficientemente baixa, ou seja, quando já não forem permitidas alterações que provoquem um aumento da energia do sistema. Este algoritmo encontra-se descrito, na forma de um diagrama, na figura 4.1.

Não é claro que o método de *Simulated Annealing* permita uma convergência mais rápida para um mínimo global quando comparado com um método iterativo simples, sem parâmetro de controlo. Em certas situações, este último pode mesmo ser mais rápido, quando temos poucos mínimos locais ou quando o sistema já se encontra numa zona em que uma simples descida para o mínimo local corresponde a encontrar o mínimo global.

Com este algoritmo é possível lidar com modelos altamente não lineares, caóticos, com muitas variáveis e restrições. Apresenta uma elevada flexibilidade e capacidade de aproximação a um óptimo global. São facilmente adaptáveis a vários tipos de problemas e a *performance* pode ser melhorada otimizando o código.

Sendo um método metaheurístico, é necessário tomar algumas opções e estabelecer regras para se tornar num algoritmo propriamente dito.

As soluções com a melhor qualidade são as que requerem tempos de computação mais elevados havendo a necessidade de *pesar* estes dois factores.

4.1.2 Adequabilidade

Simulated Annealing aparece de imediato como um algoritmo de eleição aquando da optimização de sistemas onde lidamos com instrumentos financeiros. Regressão linear e métodos de busca local são técnicas utilizadas em instrumentos híbridos como em mercados de taxas de juro, mercados estrangeiros, opções, futuros, *forwards* e *swaps*. Contudo, a complexidade e a não linearidade destes problemas com muitas variáveis, bem como o crescente interesse em incluir modelação mais sofisticada nos mercados têm vindo a sugerir uma maior sofisticação nestes algoritmos.

A utilização de *Simulated Annealing* é adoptada neste trabalho, na valorização de derivados de taxas de juro e na próxima secção encontra-se descrita toda a implementação prática.

4.2 Resultados

Como vimos em secções anteriores é possível calcular o preço de alguns derivados de taxas de juro a partir de árvores trinomiais. Depois de descrita, na secção 3.1, a construção destas árvores (para o modelo Hull-White), segue-se agora um exemplo de como podemos utilizá-las para a obtenção do preço de *swaptions* e apresentam-se os resultados obtidos através dos métodos desenvolvidos.

Construção da árvore trinomial

Em primeiro lugar é necessário construir uma árvore que seja consistente com a *yield curve* observada na data de valorização. Escolhem-se valores para a volatilidade e taxa *mean reversion* e aplica-se o método descrito na secção 3.1. A tabela 4.1 mostra os valores que descrevem esta *yield curve* que servirá de *input* neste exemplo. Considere-se

Tabela 4.1:

Yield Curve Inicial	
t (anos)	taxa (%)
1	5,0
2	5,2
3	5,3
4	5,4
5	5,8

também $\sigma = 0.100$ e $a = 0.010$. Da tabela 4.1 sabemos que $\Delta t = 1$.

Posicionando todos os nós da árvore e calculando os valores das probabilidades, p_u , p_m e p_d , em cada um, obtemos a árvore da figura 4.2. Os nós encontram-se numerados para facilitar a leitura da tabela 4.2 onde se encontram as propriedades de cada nó: coordenadas (i, j) , t , α_i , $R_1(i, j)$, $R_2(i, j)$, p_u , p_m , p_d e $Q_{i,j}$.

Tabela 4.2: Propriedades dos nós da árvore da figura 4.2.

Propriedades dos nós								
$t(\text{anos})$	(i, j)	R_1 (%)	R_2 (%)	p_u	p_m	p_d	Q	α (%)
0	0	0,0000	5,0000	0,1667	0,6667	0,1667	1,0000	5,000
1	1	1,7321	6,7371	0,1217	0,6567	0,2217	0,1585	5,005
	2	0,0000	5,0050	0,1667	0,6667	0,1667	0,6342	
	3	-1,7321	3,2730	0,2217	0,6567	0,1217	0,1585	
2	4	3,4641	9,0822	0,8867	0,0267	0,0867	0,0180	5,618
	5	1,7321	7,3501	0,1217	0,6567	0,2217	0,1979	
	6	0,0000	5,6181	0,1667	0,6667	0,1667	0,4690	
	7	-1,7321	3,8860	0,2217	0,6567	0,1217	0,2013	
3	8	-3,4641	2,1540	0,0867	0,0267	0,8867	0,0187	5,637
	9	3,4641	9,1008	0,8867	0,0267	0,0867	0,0370	
	10	1,7321	7,3688	0,1217	0,6567	0,2217	0,1951	
	11	0,0000	5,6367	0,1667	0,6667	0,1667	0,3823	
	12	-1,7321	3,9047	0,2217	0,6567	0,1217	0,2015	
4	13	-3,4641	2,1726	0,0867	0,0267	0,8867	0,0398	5,859
	14	3,4641	9,3232	0,8867	0,0267	0,0867	0,0520	
	15	1,7321	7,5912	0,1217	0,6567	0,2217	0,1801	
	16	0,0000	5,8591	0,1667	0,6667	0,1667	0,3303	
	17	-1,7321	4,1271	0,2217	0,6567	0,1217	0,1885	
	18	-3,4641	2,3950	0,0867	0,0267	0,8867	0,0581	

Uma vez construída a árvore trinomial ajustada à curva de taxas de juro, podemos utilizá-la para obter preços de derivados de taxas de juro. De seguida segue-se um exemplo que descreve o cálculo de *swaptions*.

Preços de *swaptions*

O conjunto dos nós da árvore da figura 4.2 corresponde a todos os estados possíveis para a variável R_2 . Mais precisamente, em cada instante t_i o valor de R_2 toma um dos valores possíveis para esse instante, ou seja, o percurso efectuado pela taxa de juro pode passar por um dos nós existentes na árvore em t_i . Calcular o valor da *swaption* corresponde a obter o seu valor presente (valor do nó que tem as coordenadas $(i, j) = (0, 0)$ ou $t = 0$).

Como vimos na secção 2.3.1, através da equação

$$\frac{L}{m} \max(S_T - S_K, 0) \quad (4.4)$$

podemos calcular, para um determinado instante, o *payoff* de um *swap* que tem um *strike* S_K . Assim, podemos aplicar esta equação a cada nó da árvore:

$$\frac{L}{m} \max(R_2(i, j) - S_K, 0) \quad (4.5)$$

Como vimos anteriormente (secção 2.3.1, o valor total de uma *swaption* consiste, na soma de todos os *payoffs*, da data de maturidade até ao presente. Assim, na árvore trinomial, começamos por calcular os *payoffs* em cada nó e em seguida fazemos a soma até aos nós que correspondem ao instante em que começa o período da *swap* (t_1). Até a $t = 0$ basta fazer o desconto com capitalização contínua nas transições (com as respectivas probabilidades), utilizando a equação entre nós:

$$V_{i,j} = \frac{L}{m} \max(R_{i,j} - K, 0) + V_{i+1} e^{-R_{i,j} \Delta t}, \quad t_1 \leq t \leq T \quad (4.6)$$

ou

$$V_{i,j} = V_{i+1} e^{-R_{i,j} \Delta t}, \quad t < t_1 \quad (4.7)$$

onde

$$V_{i+1} = p_u V_{i+1,j+1} + p_m V_{i+1,j} + p_d V_{i+1,j-1} \quad (4.8)$$

e

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad (4.9)$$

Calibração

Depois de introduzido, neste capítulo, o processo de calibração do modelo Hull-White apresenta-se agora uma descrição um pouco mais detalhada do que foi feito nesta fase do trabalho realizado.

Com os métodos numéricos desenvolvidos, utilizando a linguagem de programação C++, foi possível a construção de árvores trinomiais, consistentes com uma curva inicial de taxas juro que faz parte do conjunto de dados de entrada, bem como a obtenção de preços de alguns derivados de taxas de juro, e.g. *swaptions*, *caps* e *floors*.

Utilizando o algoritmo de *Simulated Annealing* (ver [12]), o processo de calibração utilizado neste trabalho é dividido em duas fases. A primeira consiste em construir uma árvore trinomial para cada instrumento financeiro introduzido, sendo que, no final desta fase teremos n árvores correspondentes aos n instrumentos disponíveis. É aplicado este algoritmo de otimização global a todas as árvores de modo a que sejam capazes de se ajustar ao respectivo instrumento. É importante notar que, no início, todas as árvores são iguais por serem contruídas com os mesmos parâmetros do modelo (volatilidade e taxa *mean reversion*). Assim, o algoritmo aplicado a cada árvore vai procurar o conjunto de parâmetros que minimiza a diferença entre o valor do instrumento financeiro introduzido e o valor obtido através da árvore trinomial. Esta fase da calibração serve apenas para conseguirmos obter de forma rápida e simples uma aproximação relativamente boa à solução final que consiste num conjunto de parâmetros que permita, através de uma única árvore, a valorização de derivados de taxas de juro diferentes dos introduzidos inicialmente.

Depois de obtidas as árvores consistentes com os instrumentos introduzidos, a segunda fase desta calibração consiste em obter uma árvore final que permita calcular de forma correcta os preços dos instrumentos utilizados na primeira fase. Assim, inicia-se esta fase construindo uma árvore trinomial com um conjunto de parâmetros (σ e a) que são obtidos através das n árvores contruídas. De uma forma mais formal, considere-se U_i o preço do instrumento i introduzido no sistema de calibração e V_i o preço do respectivo instrumento obtido através de uma árvore trinomial. Definimos $(a_{i,t_0}, a_{i,t_1}, a_{i,t_2}, \dots, a_{i,T})$ e $(\sigma_{i,t_0}, \sigma_{i,t_1}, \sigma_{i,t_2}, \dots, \sigma_{i,T})$ como os parâmetros do modelo para uma árvore i . Cada intervalo de tempo $t_k - t_{k-1}$ corresponde a um passo temporal na árvore e T corresponde à maturidade do derivado, e.g. maturidade de uma *swaption*. Considere-se agora $(a'_{t_0}, a'_{t_1}, a'_{t_2}, \dots, a'_T)$ e $(\sigma'_{t_0}, \sigma'_{t_1}, \sigma'_{t_2}, \dots, \sigma'_T)$ como os parâmetros da árvore final. No início da segunda fase da calibração estes são obtidos calculando a média, para cada t , dos parâmetros das n árvores construídas. No entanto, para cada árvore, e no caso de *swap-*

tions são apenas consideradas as datas inferiores a T .

$$a'(t) = \frac{1}{m} \sum_i^m a_i(t) \quad (4.10)$$

e

$$\sigma'(t) = \frac{1}{m} \sum_i^m \sigma_i(t) \quad (4.11)$$

para os valores dos parâmetros da árvore final antes de se iniciar a calibração final. m representa o número de árvores que contribuem para o valor do parâmetro da árvore final no instante t .

A segunda fase deste processo de calibração consiste em ajustar a árvore final aos dados observados no mercado, ou seja, encontrar o conjunto de parâmetros que minimiza a diferença entre os preços de mercado e os preços obtidos através desta árvore. Para tal é útil utilizar a equação 4.1 através da qual podemos estabelecer uma condição de paragem do algoritmo. Demonstra-se de seguida que, aplicando novamente o algoritmo de *simulated annealing* a esta última árvore conseguimos obter, com sucesso, uma árvore trinomial que nos permite calcular todos os instrumentos utilizados como *input* no sistema de calibração.

Os testes apresentados na última parte deste capítulo basearam-se no cálculo de preços de *swaptions* com um conjunto A de parâmetros iniciais (volatilidade e taxa *mean reversion*) através dos métodos numéricos desenvolvidos e preços do mesmo instrumento financeiro com um conjunto B diferente de A (diferentes valores de volatilidade e *mean reversion*)⁴. Esta foi a forma encontrada de simular preços de mercado obtidos pelo modelo Hull-White. O objectivo da calibração foi, nesta fase, encontrar o conjunto de parâmetros que melhor ajusta os preços com o conjunto de parâmetros A aos preços com o conjunto de parâmetros B (considerados parâmetros de mercado). Neste teste temos a vantagem de conhecermos os conjuntos A e B bem como a certeza de que os preços são obtidos pelo mesmo modelo.

⁴a curva de taxas de juro foi a mesma nos dois conjuntos.

De seguida comparam-se os valores obtidos com os dois conjuntos, A e B (parâmetros na tabela 4.5). A tabela 4.4 mostra a diferença entre os valores obtidos antes e depois da calibração. O gráfico da figura 4.3 mostra que a maioria dos erros se concentra em torno de zero. Por fim, a figura 4.4 mostra a diferença entre as árvores contruídas com os parâmetros B (a vermelho) e A (a preto) e a figura 4.5 mostra a árvore final calibrada aos valores de mercado (B).

Tabela 4.3: Parâmetros iniciais para o teste de convergência do modelo.

t (anos)	taxa (%)	σ		a	
		A	B	A	B
1	5	0,03	0,01	0,2	0,1
2	5,2	0,03	0,01	0,2	0,1
3	5,3	0,03	0,01	0,2	0,1
4	5,4	0,03	0,01	0,2	0,1
5	5,8	0,03	0,01	0,2	0,1

Como conhecemos os parâmetros utilizados para simular os preços de mercado podemos comparar os parâmetros obtidos através da calibração. Podemos ver no gráfico da figura 4.6 as funções $\sigma(t)$ e $a(t)$ obtidas e comparadas às funções utilizadas para a simulação dos preços de mercado.

Como podemos ver na figura 4.6, os parâmetros de volatilidade que resultaram da calibração resultam numa curva (ao contrário do que foi introduzido no modelo).

Calibração com Δt variável

Depois de testado todo o processo de calibração para árvores com Δt constante, fez-se o mesmo para Δt variável ao longo do tempo. Em geral, será necessário utilizar este tipo de calibração pelo facto de, eventualmente, termos disponíveis instrumentos financeiros com diversas datas de *payoff* e maturidade que nos obrigam a contruir árvores cujos nós “encaixam” na perfeição nos instantes correspondentes a essas datas. Em alguns casos teremos que utilizar métodos de interpolação para obter os pontos da *yield curve* de que necessitamos, uma vez que apenas temos disponíveis pontos da curva relativos a

Tabela 4.4: Comparação entre V_A e V_B , antes e depois da calibração. V representa o valor de uma *swaption* sobre um notional de 1000 (em qualquer unidade monetária).

Sem calibração			Com calibração		T_i	T_f	K
V_A	V_B	erro(%)	V_A	erro(%)			
25,98080	11,07010	134,69	11,06170	-0,0759	1	2	0,0500
19,44020	5,14440	277,89	5,15554	0,2165	1	2	0,0580
45,18790	19,64040	130,08	19,52830	-0,5708	1	3	0,0500
34,25840	9,42455	263,5	9,74020	3,3492	1	3	0,0580
65,89130	29,39170	124,18	29,12700	-0,9006	1	4	0,0500
51,16560	14,67690	248,61	14,89380	1,4778	1	4	0,0580
94,63010	51,31660	84,4	51,26920	-0,0924	1	5	0,0500
76,55710	31,07300	146,38	31,28960	0,6971	1	5	0,0580
36,59330	16,85480	117,11	16,52200	-1,9745	2	3	0,0500
27,21750	7,93897	242,83	8,03906	1,2607	2	3	0,0580
57,29670	26,60610	115,35	26,12070	-1,8244	2	4	0,0500
44,12470	13,19140	234,5	13,19260	0,0091	2	4	0,0580
86,03550	48,53100	77,28	48,26290	-0,5524	2	5	0,0500
69,51620	29,58740	134,95	29,58840	0,0034	2	5	0,0580
39,91060	18,32160	117,83	18,06530	-1,3989	3	4	0,0500
31,72550	9,53254	232,81	9,73824	2,1579	3	4	0,0580
68,64940	40,24650	70,57	40,20750	-0,0969	3	5	0,0500
57,11690	25,92860	120,29	26,13400	0,7922	3	5	0,0580
49,44220	31,67620	56,09	31,74090	0,2043	4	5	0,0500
42,29870	21,64800	95,39	21,54940	-0,4555	4	5	0,0580

determinadas datas.

Segue-se um exemplo de um teste semelhante ao efectuado para Δt constante. Neste foi utilizada a curva de taxas de juro da tabela 4.5 e os mesmos parâmetros que foram utilizados no exemplo anterior (volatilidade e *mean reversion*).

Os resultados deste teste encontram-se na tabela 4.6 e as figuras 4.7 e 4.8 mostram a diferença entre as duas árvores e a distribuição dos erros, antes da calibração.

Após a aplicação do algoritmo de calibração, podemos ver, na figura 4.9, o ajuste da árvore final aos parâmetros de mercado. O gráfico da figura 4.10 mostra a minimização da diferença entre os preços dos conjuntos A e B .

Tabela 4.5: Curva inicial de taxas de juro utilizada para testes com Δt variável.

Yield Curve Inicial com Δt variável	
t (anos)	taxa (%)
1,0	5,0
1,5	5,0
2,0	5,2
3,5	5,3
4,0	5,4
4,2	5,4
5,0	5,8

Para finalizar a apresentação dos testes efectuados na calibração do modelo Hull-White, mostra-se a influência dos parâmetros que se utilizam para construir, no início da calibração, a árvore trinomial que queremos ajustar de forma a ficar consistente com a estrutura de volatilidade observada no mercado e, assim, possibilitar o cálculo correcto dos preços de derivados de taxas de juro. Estes parâmetros baseiam-se numa simples especulação ou *initial guess* em relação aos parâmetros que descrevem a previsão do mercado no instante em que estamos a avaliar o preço dos produtos financeiros. Assim, é conveniente termos um sistema que seja capaz de calibrar o modelo eficientemente e sem grandes exigências em relação a estes parâmetros iniciais.

O gráfico da figura 4.11 mostra a variação do erro médio⁵ de um instrumento de calibração, com o número de iterações ao longo do algoritmo de calibração.

Verifica-se assim, na figura 4.11, que chegamos “mais depressa” a um erro mínimo relativo se escolhermos os parâmetros iniciais que mais se aproximam dos que descrevem a estrutura de volatilidade do mercado. No entanto, mesmo escolhendo uma volatilidade de 60% quando o mercado espera uma volatilidade futura e constante de 1%, permite obter resultados satisfatórios se utilizarmos mais recursos computacionais (ver figura 4.12)

⁵Soma dos erros de cada instrumento a dividir pelo número de instrumentos utilizados na calibração.

Tabela 4.6: Comparação entre V_A e V_B , antes e depois da calibração, com Δt variável. V representa o valor de uma *swaption* sobre um notional de 1000 (em qualquer unidade monetária).

Sem calibração			Com calibração		T_i	T_f	K
V_A	V_B	erro(%)	V_A	erro(%)			
14,16610	4,12964	243,03	4,12828	-0,0329	1	1,5	0,0500
28,54460	12,14200	135,09	12,21350	0,5889	1	2	0,0530
64,55200	23,23260	177,85	23,23400	0,0060	1	3,5	0,0500
82,41200	30,34200	171,61	30,35550	0,0445	1	4	0,0530
92,95410	35,13670	164,55	35,25150	0,3267	1	4,2	0,0500
126,05500	57,56120	118,99	57,57660	0,0268	1	5	0,0530
20,71100	9,86373	109,97	9,29722	-5,7434	1,5	2	0,0500
56,71840	20,95430	170,68	20,31770	-3,0380	1,5	3,5	0,0530
74,57830	28,06370	165,75	27,43920	-2,2253	1,5	4	0,0500
85,12040	32,85850	159,05	32,33520	-1,5926	1,5	4,2	0,0530
118,22200	55,28290	113,85	54,66030	-1,1262	1,5	5	0,0500
50,38590	19,10300	163,76	19,10570	0,0141	2	3,5	0,0530
68,24590	26,21240	160,36	26,22720	0,0565	2	4	0,0500
78,78800	31,00710	154,1	31,12330	0,3748	2	4,2	0,0530
111,88900	53,43150	109,41	53,44830	0,0314	2	5	0,0500
53,86730	18,20000	195,97	18,14200	-0,3187	3,5	4	0,0530
64,40940	22,99470	180,11	23,03800	0,1883	3,5	4,2	0,0500
97,51070	45,41920	114,69	45,36310	-0,1235	3,5	5	0,0530
28,40210	11,90410	138,59	12,01750	0,9526	4	4,2	0,0500
61,50330	34,32860	79,16	34,34260	0,0408	4	5	0,0530
43,64340	27,21920	60,34	27,22110	0,0070	4,2	5	0,0500

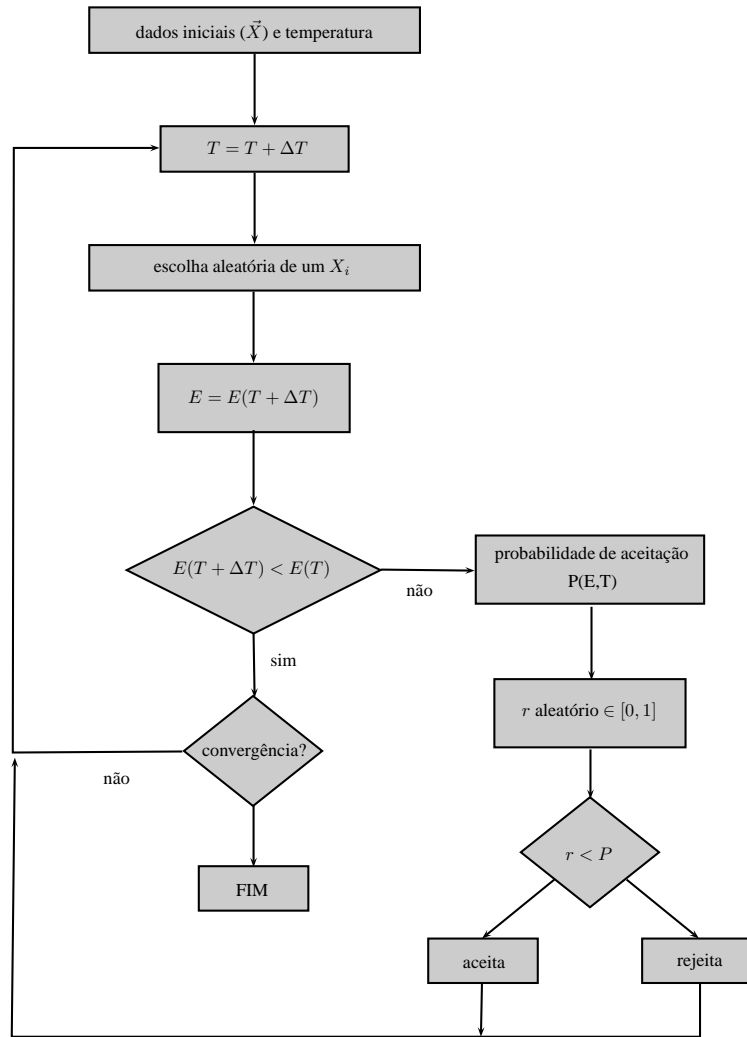


Figura 4.1: Algoritmo de Simulated Annealing.

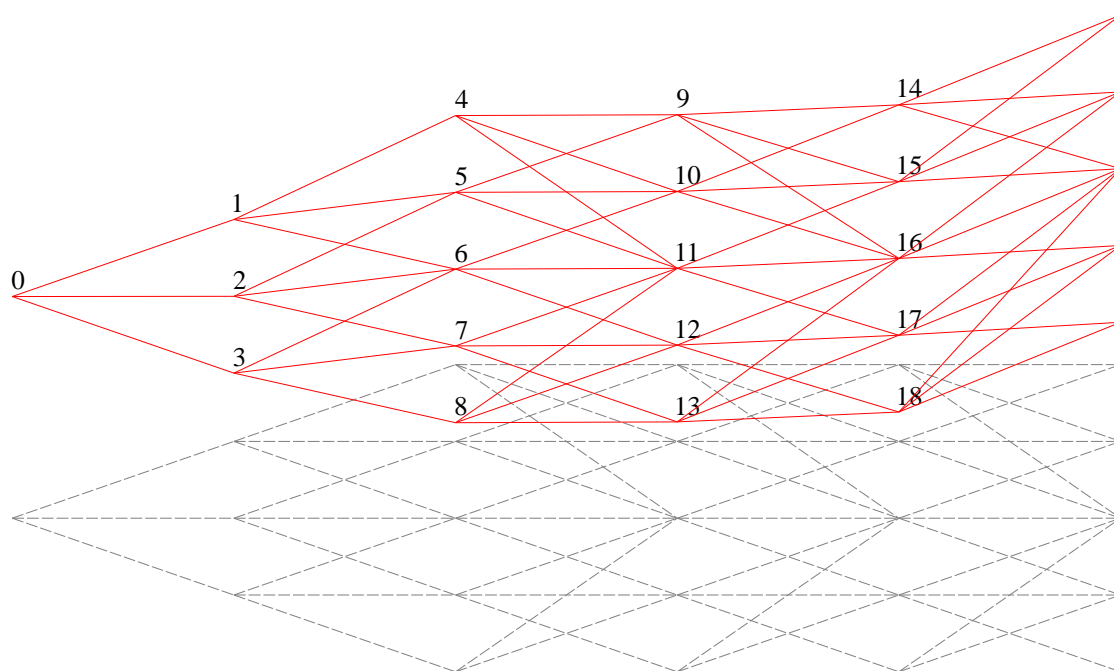


Figura 4.2: Árvore trinomial do exemplo da secção 4.2 (R_1 a cinzento e R_2 a vermelho).

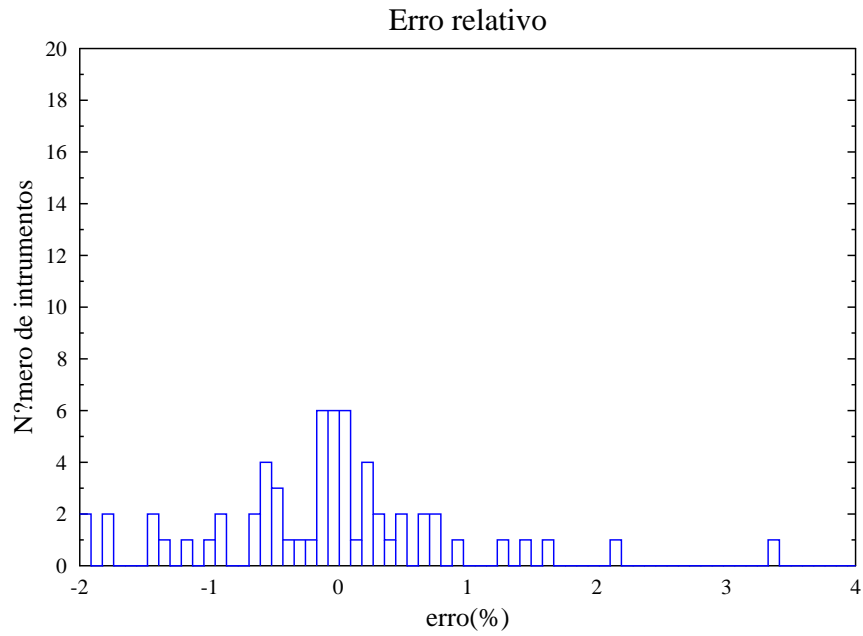


Figura 4.3: Comparação entre os valores de *swaptions* dos conjuntos *A* e *B*.

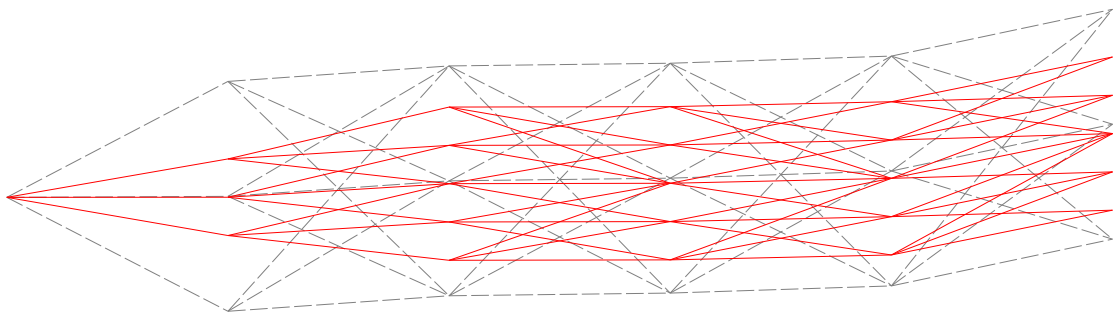


Figura 4.4: Comparação entre as árvores trinomiais *A* (a preto) e *B* (a vermelho) antes da calibração.

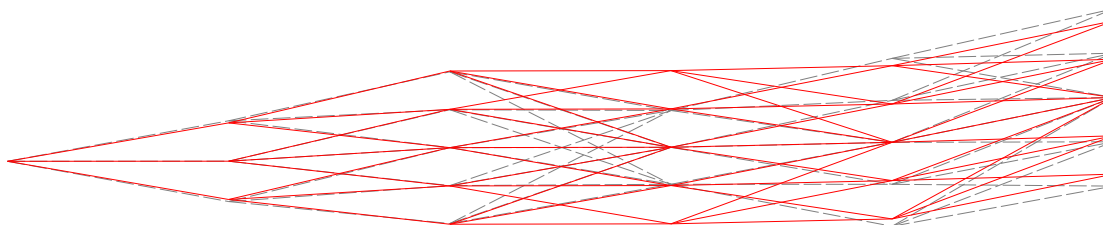


Figura 4.5: Árvore trinomial ajustada aos valores de mercado (obtidos por simulação) após calibração.

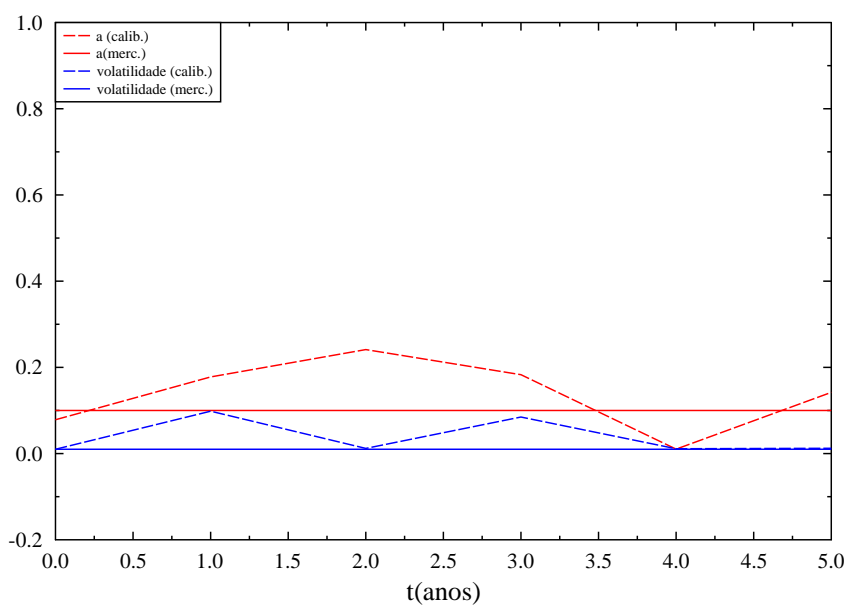


Figura 4.6: Parâmetros finais obtidos após calibração com valores de mercado obtidos por simulação.

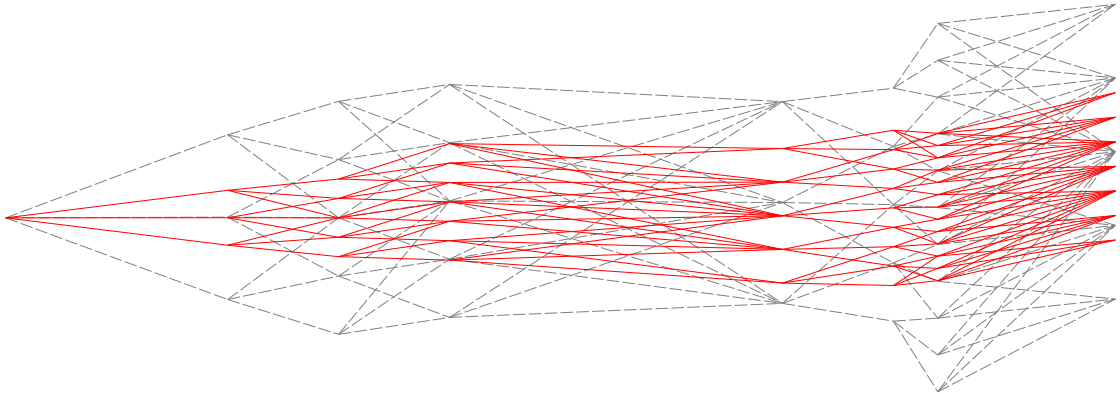


Figura 4.7: Comparação entre as árvores trinômiais A (a preto) e B (a vermelho) antes da calibração.

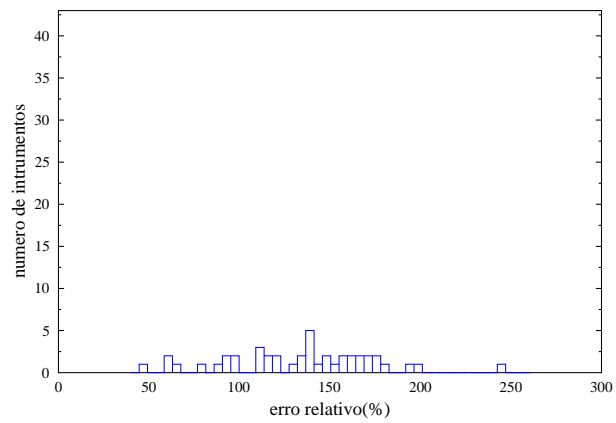


Figura 4.8: Comparação entre os valores de *swaptions* dos conjuntos A e B (com Δt variável) antes da calibração.

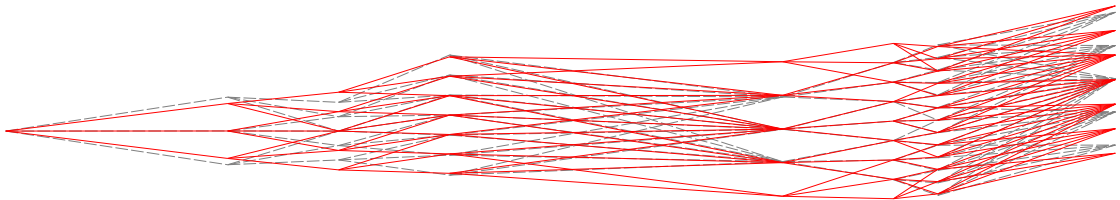


Figura 4.9: Comparação entre as árvores trinômiais A (a preto) e B (a vermelho) depois da calibração.

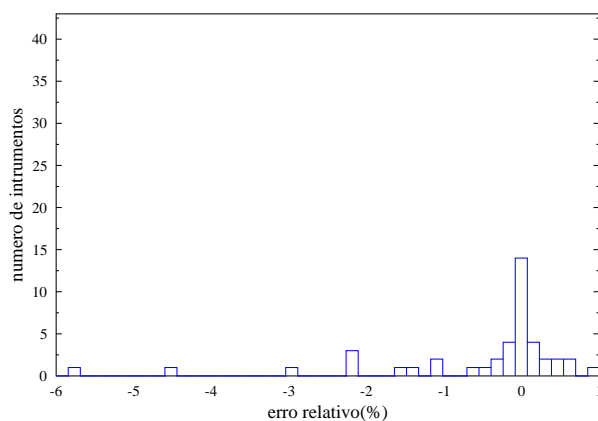


Figura 4.10: Comparação entre os valores de *swaptions* dos conjuntos *A* e *B* (com Δt variável) depois da calibração.

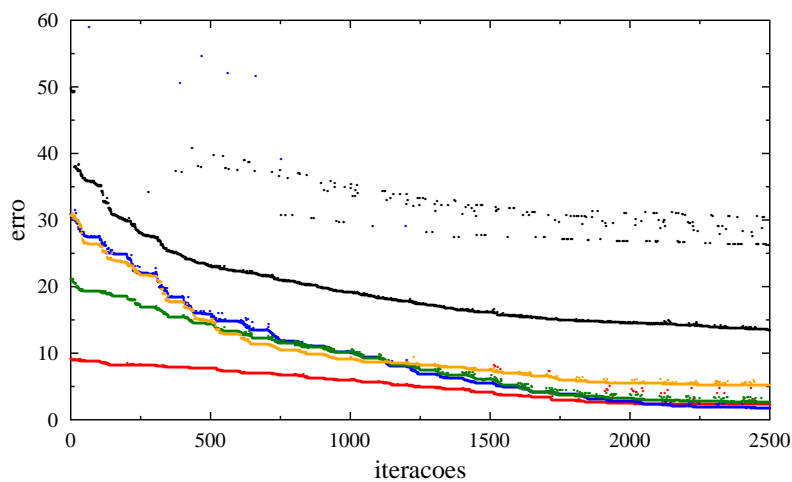


Figura 4.11: Variação do erro em função do número de iterações para diferentes valores de parâmetros de volatilidade (constante) ($\sigma = 0.1$ (vermelho), $\sigma = 0.3$ (verde), $\sigma = 0.4$ (laranja), $\sigma = 0.5$ (azul) e $\sigma = 0.6$ (preto)).

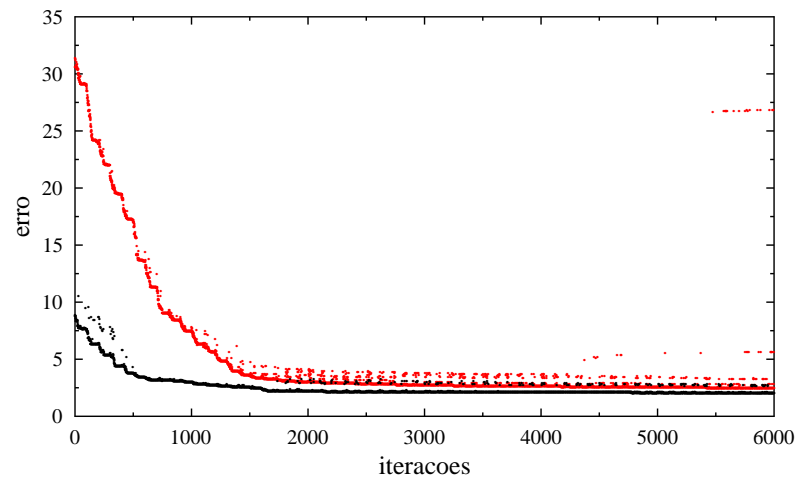


Figura 4.12: Variação do erro em função do número de iterações para valores de parâmetros de volatilidade (constante) distintos ($\sigma = 0.02$ (preto) e $\sigma = 0.6$ (vermelho)).

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Ao longo deste trabalho foram estudados alguns dos principais modelos de valorização de derivados de taxas de juro. O modelo Hull-White foi o escolhido para o desenvolvimento de métodos numéricos com o objectivo de integração num sistema de valorização que inclui outros tipos de derivados. Grande parte deste estudo foi dedicada à construção de métodos de construção de árvores trinomiais consistentes com o modelo utilizado, métodos de valorização de derivados de taxas de juro (e.g. *swaptions*, *caps* e *floors*) e métodos de optimização global (*Simulated Annealing* utilizado na calibração).

As soluções analíticas existentes para obrigações de taxas de juro e opções europeias permitiram validar os métodos de construção de árvores trinomiais para casos em que temos passos temporais constantes e também para casos em que temos passos temporais variáveis.

A última parte deste trabalho concentrou-se em implementar e otimizar o método de calibração do modelo. O algoritmo de *Simulated Annealing* provou ser bastante eficaz e os resultados obtidos foram bastante satisfatórios. Em todos os testes efectuados foi possível verificar, com mais ou menos tempo de computação, a convergência do modelo, mesmo com a utilização de árvores trinomiais com Δt variável. Isto sugere que, se tivermos disponíveis instrumentos de calibração em número e diversificação suficientes, conseguimos valorizar uma grande variedade de derivados de taxas de juro com quaisquer datas de maturidade e *payoff*.

O valor de um derivado de taxa de juro real, ou seja, negociado numa instituição financeira, é obtido através da utilização de modelos que descrevem processos para a taxa de juro. Apesar de não serem em geral, para produtos mais simples, os modelos a definir o preço de mercado, é necessária a sua utilização para valorizar produtos exóticos. Seria de esperar que, se fossem efectuados testes utilizando valores de instrumentos financeiros obtidos directamente de uma entidade financeira, pudessemos obter resultados igualmente satisfatórios.

Como derivados exóticos, o preço de *swaptions* deve ser obtido utilizando modelos pois não estão associadas a um mercado similar ao de acções ou de obrigações.

Futuros melhoramentos a este trabalho passam por desenvolver métodos numéricos para outros modelos (e.g *Libor Market Model*), para aplicação na valorização de uma maior variedade de derivados de taxas de juro. Será importante perceber quais os modelos e métodos numéricos que devem ser utilizados quando queremos obter o valor mais justo de um derivado. Este será um factor importante numa futura fase de integração num sistema de valorização de derivados financeiros.

Bibliografia

- [1] Scholes Black, F. *Journal of Portfolio Management*, 81, 637-659, M. 1973.
- [2] Fischer Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):167–179, 1976.
- [3] Les Clewlow and Chris Strickland. *Implementing Derivative Models (Wiley Series in Financial Engineering)*. John Wiley & Sons, December 1996.
- [4] Ross S. A. Rubinstein M. Cox, J. C. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-264, 1979.
- [5] White A. Hull, J. *The Review of Financial Studies*, 3, 4, 573-592, 1990.
- [6] White A. Hull, J. *Journal of Derivatives*, Vol. 3, No. 3, 1996.
- [7] John Hull. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson/Prentice Hall, 2006.
- [8] Don S. Lemons. *An Introduction to Stochastic Processes in Physics (Johns Hopkins Paperback)*. The Johns Hopkins University Press, illustrated edition edition, May 2002.
- [9] Chris Strickland Les Clewlow. *Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices*, 1999.
- [10] R. C. Merton. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183, 1973.
- [11] T. Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific Publishing Company, 1999.

- [12] Emile H. L. Aarts Peter J. M. van Laarhoven. *Simulated Annealing: Theory and applications*. Springer Netherlands, May 1988.
- [13] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, August 2007.
- [14] O. A. Vasicek. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183, 1977.
- [15] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188, November 1977.

[1, 10, 14, 5, 4, 13, 7, 8, 9, 2, 15, 6, 12, 11]